Analyse mathématique et océanographie

Roger Lewandowski

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET OCÉANOGRAPHIE

R. Lewandowski*

ESSAI SUR LA MODÉLISATION ET L'ANALYSE MATHÉMATIQUE
DE QUELQUES MODÈLES DE TURBULENCE UTILISÉS EN OCÉANOGRAPHIE

*Université de Rennes I, 35000 Rennes, France, Roger.Lewandowski@univ-rennes1.fr, http://name.math.univ-rennes1.fr/roger.lewandowski/

INTRODUCTION

Ce livre est un essai sur la modélisation et l'analyse mathématique de *quelques* modèles turbulents de circulation océanique aux échelles climatiques. Ces modèles sont constitués par des systèmes couplant les équations aux dérivées partielles non linéaires décrivant le mouvement océanique avec celles décrivant les échanges turbulents verticaux dans l'océan. Pour comprendre leur structure, on étudie d'abord la circulation océanique sans turbulence puis la turbulence sans la coupler à la circulation océanique. Au terme de ce travail, on est en mesure d'étudier les “gros" systèmes couplés, notés (MQ), dont la modélisation et l'analyse constituent la finalité de cet ouvrage, les principaux étant les systèmes $(M4)$ et $(M6)$. Outre deux appendices, ce livre est divisé en trois parties :

> **Partie I** — *Modélisation et analyse mathématique des équations primitives pour l'océan sans turbulence,*
>
> **Partie II** — *Modélisation des équations simulant la turbulence verticale dans l'océan et analyse mathématique de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente,*
>
> **Partie III** — *Analyse mathématique des systèmes couplés de circulation océanique avec l'équation pour l'énergie cinétique turbulente.*

1) MODÉLISATION ET ANALYSE : PREMIÈRES GÉNÉRALITÉS

La *modélisation* a pour objet l'obtention de problèmes mathématiques déduits de principes physiques de base, dans le cas présent ceux de l'océanographie.

Dans ce livre, on entend par *modélisation* :

- la définition des échelles (climatiques dans ce travail) et du domaine d'étude,
- la définition des variables physiques intervenant dans la description du mouvement océanique et de la turbulence verticale (vitesse, densité, température, salinité, pression, viscosités turbulentes, énergie cinétique turbulente),
- l'écriture des équations aux dérivées partielles gouvernant l'évolution de ces variables,
- la détermination des conditions aux limites là où cela s'impose,

- l'adimensionnalisation des systèmes obtenus et des conditions aux limites puis la réécriture sous une forme simplifiée des systèmes physiques pour pouvoir formuler clairement des problèmes de mathématique.

Les étapes générales de *l'analyse mathématique* des systèmes obtenus sont les suivantes :

- construction de solutions approchées, solutions de systèmes régularisés approchant le système considéré,
- étude du comportement des suites de solutions appochées à partir d'estimations a priori et passage à la limite dans les équations,
- énoncé et démonstration (lorsque c'est possible) de résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles à ces systèmes,
- étude des propriétés qualitatives des solutions (bornes, signe des solutions...).

2) LA MODÉLISATION DANS L'ESSAI

On fait dans cet essai

- une modélisation succincte des équations primitives pour l'océan,
- une modélisation succincte de la turbulence verticale dans l'océan,
- une modélisation de termes de pression additionnels dans les équations primitives.

On s'est attaché à réécrire de la physique relativement standard dans un langage condensé le plus simple possible et accessible à un mathématicien, ce qui permet d'éclairer et de mieux comprendre la structure des problèmes d'équations aux dérivées partielles analysés. Ce travail permet également d'ouvrir de nouveaux problèmes, comme par exemple celui du système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$.

La modélisation a pour point de départ la mécanique des fluides géophysiques, c'est-à-dire des fluides tournants gravitationnels. Une fois les variables physiques définies, on obtient les équations et les conditions aux limites à partir :

— de la physique de base, les équations de Navier-Stokes et la thermodynamique,
— de faits expérimentaux,
— d'analyse dimensionnelle,
— d'hypothèses justifiées par des raisonnements physiques,
— de manipulations formelles dans les équations et d'approximations souvent déduites de lois d'échelles.

3) L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DANS L'ESSAI

L'analyse mathématique au sens large est très vaste et dans cet essai on en applique juste quelques règles. Les méthodes utilisées sont celles en équations aux dérivées partielles dérivées de l'analyse fonctionnelle, la plus utilisée dans ce travail étant *la méthode de compacité* (*cf.* LIONS [1], 1969). Les inconnues sont des fonctions scalaires ou des champs de vecteurs définis dans un domaine tridimensionnel (champ des vitesses, densité...). On commence par définir les espaces de fonctions dans lesquels on peut donner un sens aux équations satisfaites, sens faible ou distributions, sens renormalisé. On cherche ensuite un procédé d'approximation pour construire des suites de solutions approchées et le problème qui se pose alors est

le passage à la limite dans les équations.

Pour cela, on doit successivement

- obtenir des *estimations a priori* déduites des équations à partir d'égalités d'énergie ou encore de techniques d'interpolation,
- extraire des suites de solutions approchées des sous-suites faiblement convergentes dans certains espaces, fortement dans d'autres grâce à des lemmes de compacité.

À l'issue de ces deux étapes on passe à la limite dans les équations, ce qui consiste à déterminer le système satisfait par les limites des suites de solutions approchées.

4) SPÉCIFICITÉS PHYSIQUES

• Les problèmes étudiés sont posés aux échelles climatiques, c'est-à-dire de très grandes échelles de temps et d'espace. L'océan constitue une couche d'eau “mince" entourant la planète. Pour cette raison, les phénomènes considérés sont anisotropes. On distingue les “grandes" échelles horizontales et les “petites" échelles verticales, ce qui entraine deux conséquences très importantes :

— on admet que l'océan est constitué d'un fluide **hydrostatique**,
— on sait juste paramétrer les échanges turbulents verticaux dans l'océan grâce à des **viscosités turbulentes** verticales.

• La rotation terrestre constitue une autre spécificité physique du problème posé par l'océanographie. Elle implique la présence d'un terme dû à la force de Coriolis dans les équations, un terme dominant pour de grandes échelles de temps. Ce constat entraine la notion **d'équilibre géostrophique** qui, combiné à l'équation hydrostatique, est la base du modèle *géostrophico-barotrope turbulent* $(M6)$ obtenu dans ce livre. Ce modèle est principalement caractérisé par la présence de termes de transport qui dépendent de la pression et un terme de production d'énergie cinétique turbulent, dépendant de la densité au lieu de la vitesse horizontale.

• L'atmosphère joue un rôle important. Dans ce livre, l'océan est “forcé" par l'atmosphère et on ne considère pas de systèmes couplés océan-atmosphère.
L'hypothèse de base concernant l'interface air-mer est **l'hypothèse du toit rigide** qui suppose en un certain sens que la surface de l'océan est fixe. Cette hypothèse, combinée à l'équation hydrostatique, conduit à l'introduction de **la pression superficielle** p_s qui joue un rôle crucial tout au long de cet ouvrage. Grâce à l'équation hydrostatique, tous les termes dépendant de la pression sont exprimés en fonction de la densité et de p_s.
L'influence de l'atmosphère sur l'océan est prise en considération dans les conditions aux limites en surface qui dépendent essentiellement de la vitesse du vent, que l'on suppose donnée. On décrit en détail la condition aux limites satisfaite par la vitesse horizontale moyenne, condition dans laquelle on paramètre la couche de mélange air-mer. De toutes les modélisations possibles pour l'obtenir, on a choisi la présentation “turbulente" cohérente avec l'ensemble de l'ouvrage.

• Enfin, l'océan est un fluide à densité variable bien que l'approximation de Boussinesq implique que le champ total des vitesses du fluide soit à divergence nulle. En effet, la densité est une fonction de la température, de la salinité et de la pression par une équation d'état expérimentale. On néglige dans cet ouvrage la dépendance en pression dans l'équation d'état, sauf dans un appendice où l'on obtient quelques résultats partiels.

Notons que la densité dans les problèmes en océanographie est une variable thermodynamique au même titre que la température. Comme elle joue un rôle central dans les modèles de turbulence, on remplace dans la partie II la température par la densité qui vérifie alors une équation de transport-diffusion grâce à l'équation d'état et aux lois de conservation.

5) SPÉCIFICITÉS MATHÉMATIQUES

Les problèmes mathématiques étudiés ont deux spécificités principales dues à *la pression superficielle* p_s et *la nature des termes non linéaires*.

• *La pression superficielle* p_s est présente tout au long de l'ouvrage. Par des calculs formels, on élimine du système physique des équations primitives pour l'océan la pression et la composante verticale de la vitesse. La pression superficielle p_s apparait naturellement grâce à l'équation hydrostatique intégrée suivant la verticale. On distingue plusieurs aspects de p_s : multiplicateur de Lagrange, solution d'un problème de point fixe, point de vue mixte.

En suivant LIONS-TEMAM-WANG [1], on montre que la composante horizontale de la vitesse satisfait une contrainte délocalisée pour laquelle p_s est un *multiplicateur de*

Lagrange. C'est ce qui fait que l'étude de systèmes tels $(M1)$ et $(M4)$ des équations primitives, respectivement sans et avec turbulence, ressemble jusqu'à un certain point à l'étude des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles.

L'usage de l'équilibre géostrophique combiné à l'équation hydrostatique dans la modélisation du système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$, entraine que les termes de transport non linéaires dans les équations dépendent de p_s. Elle ne peut plus être alors considérée comme un multiplicateur de Lagrange et est traitée comme le point fixe d'une application.

Enfin, on peut traiter p_s d'une façon mixte, comme par exemple dans l'analyse des équations primitives linéaires $(M14)$ avec des termes de pression additionnels, contenant des termes dépendant de p_s dans tous les termes source. Son analyse combine l'aspect "multiplicateur de Lagrange" à l'aspect "point fixe".

• *Non linéarités*. Les équations considérées sont non linéaires. Parmi toutes les non linéarités rencontrées, on en distingue trois principales :

— les termes de transport dans les équations,
— les termes de couplage issus des viscosités turbulentes,
— le terme de production d'énergie dans la turbulence, couplant la vitesse ou la densité suivant les cas à l'énergie cinétique turbulente.

Les termes de transport dans les équations sont à l'origine de la première difficulté rencontrée dans l'analyse mathématique. Ces termes sont irréguliers et plus délicats à traiter que dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles habituelles, car le champ de vecteurs qui les détermine est en général dans un espace de type L^2. De plus, ils dépendent parfois de la pression (voir plus haut).

Les équations du mouvement océanique sont couplées à **l'énergie cinétique turbulente** k par des termes de diffusion calculés à partir des **viscosités turbulentes** qui sont des fonctions de k. Outre le problème de la construction d'approximations, se pose le problème du passage à la limite dans ces termes de diffusion. Les viscosités turbulentes ne sont pas des fonctions bornées dans les modèles physiques. En revanche, on est obligé de supposer que

— la viscosité turbulente dans l'équation pour l'énergie cinétique turbulente satisfait une hypothèse de croissance (compatible avec la physique) ou est bornée suivant les cas,
— les viscosités turbulentes sont bornées dans les équations du mouvement océanique.

Ces hypothèses sont nécessaires à l'application de la méthode de compacité, puisque la régularité des opérateurs de diffusion en dépend. On obtient seulement pour un exemple scalaire stationnaire simplifié, l'existence de solutions renormalisées lorsque les viscosités sont non bornées et ne vérifient pas d'hypothèse de croissance. Ce résultat est obtenu en suivant les idées de R.-J. Di PERNA et P.-L. LIONS qui ont introduit à l'origine la notion de solution renormalisée pour d'autres problèmes (*cf.* Di PERNA-LIONS [1]).

Un terme de production d'énergie qui couple k à la vitesse ou la densité suivant les cas, est présent dans le second membre de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente k. Il est toujours quadratique et dans un espace de type L^1. Passer à la limite dans ce terme est une des difficultés principales dans ce travail et nécessite une *égalité d'énergie*, satisfaite à la limite pour la vitesse ou la densité suivant les cas. Cette difficulté est reliée au manque de régularité des termes de transport mentionnés plus haut.

6) L'ANALYSE DES SYSTÈMES

L'analyse des principaux systèmes turbulents océaniques est achevée dans la dernière partie dans laquelle on étudie :

— le système d'équations scalaires $(M3)$ qui couple une équation pour la densité à l'équation pour l'énergie cinétique turbulente,

— le système $(M4)$ qui couple les équations primitives à l'équation pour l'énergie cinétique turbulente,

— le système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$ qui couple une équation pour la densité déduite de l'équilibre géostrophique, une équation pour la moyenne verticale de la vitesse horizontale (vitesse barotrope) et l'équation pour l'énergie cinétique turbulente.

On étudie finalement $(M14)$ qui est un système linéarisé stationnaire d'équations primitives pour l'océan sans turbulence avec des termes de pression additionnels provenant de l'équation d'état et du bilan d'énergie. Tous les autres systèmes sont intermédiaires ou des variantes de $(M3)$, $(M4)$ et $(M6)$. Ils sont écrits pour l'obtention d'un résultat nécessaire, pour leur intérêt physique et numérique ou font l'objet de remarques.

Les points suivants motivent le plan choisi pour la présentation de l'étude des systèmes.

- Aucun des modèles turbulents ne peut être analysé sans avoir étudié au préalable très en détail l'équation pour l'énergie cinétique turbulente, les autres variables étant fixées (Partie II).

- Pour étudier $(M4)$, il est nécessaire de traiter en profondeur $(M1)$ (équations primitives sans turbulence, partie I) et $(M3)$ (équations scalaires, partie III).
- On modélise dans la partie II la turbulence verticale dans l'océan, ce qui ne peut être fait sans avoir étudié d'abord la modélisation non turbulente dans la première partie.

Enfin, certains choix de modélisation sont en partie dus à des difficultés rencontrées dans l'analyse mathématique, en particulier le fait que l'on ne sait pas si les solutions des équations primitives satisfont *l'égalité d'énergie*. C'est une des motivations de la construction du système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$.

7) MÉTHODES D'APPROXIMATION

L'analyse mathématique commence par la construction de systèmes approchés pour lesquels l'existence d'une solution est une conséquence des résultats standards. Les deux outils principaux d'approximation sont *le transport tronqué* et *la méthode de temps de retard.*

• *Le transport tronqué*. Une des difficultés réside dans les termes de transport dans les équations primitives. Pour "régulariser" ces termes, on introduit le "transport tronqué" obtenu après troncature d'un des morceaux des termes de transport. Cet artefact présente l'avantage de conduire aux mêmes estimations d'énergie que lorsque le transport n'est pas tronqué et de converger dans un certain sens vers les termes d'origine. Cette idée, combinée à une borne L^∞ sur la densité, est une des bases du résultat d'existence d'une solution à $(M6)$.

• *La méthode de temps de retard*. La méthode de temps de retard est classique. Elle consiste à approcher les termes non linéaires en les linéarisant avec un léger décalage temporel. Cette méthode est détaillée pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente, en particulier dans le traitement des viscosités turbulentes. Lorsqu'une autre équation se traite de la même façon, on ne rappelle pas la méthode sauf pour le système $(M6)$ où cette approximation est dans ce cas délicate.

8) PRINCIPALES MÉTHODES D'ESTIMATION

• *Estimations d'énergie*. La plupart des estimations sont obtenues en faisant un bilan d'énergie. Pour estimer l'énergie d'une variable vérifiant une équation d'évolution, on multiplie l'équation par la variable elle-même puis on intègre par parties. On applique ensuite les résultats usuels d'analyse.

• *Estimations $L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))$ et interpolation*. Le programme précédent ne s'applique pas lorsque le second membre (ou terme source) de l'équation considérée est dans un espace de type L^1, ce qui est le cas de l'équation pour l'énergie cinétique turbulente. On obtient des estimations pour l'énergie cinétique turbulente dans des espaces de type $L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))$ et la compacité des suites de solutions approchées dans des espaces de type L^1. On utilise une méthode due à l'origine à L. BOCCARDO et T. GALLOUËT (*cf.* BOCCARDO-GALLOUËT [1]) combinée à des techniques d'interpolation basiques.

9) RÉSULTATS POUR LES SYSTÈMES TURBULENTS

Outre les termes de diffusion et les termes de pression, la difficulté commune à tous les systèmes couplés avec la turbulence est le passage à la limite dans le terme quadratique de production d'énergie présent dans l'équation pour l'énergie cinétique turbulente. Ce terme est soit dépendant de la vitesse (*cf.* $(M4)$) soit dépendant de la densité (*cf.* $(M3)$ et $(M6)$). Suivant les cas, on a besoin d'une égalité d'énergie satisfaite par les limites de la vitesse ou de la densité. Dans le cas de la vitesse (quantité vectorielle, $(M4)$) cette égalité d'énergie n'est pas disponible mais elle l'est dans le cas du système intermédiaire $(M5)$ ainsi que dans le cas de la densité (quantité scalaire, $(M3)$ et $(M6)$). Ce constat donne la nature des principaux résultats que l'on obtient sur les systèmes turbulents :

- un résultat d'existence d'une solution à $(M3)$ au sens des distributions avec des viscosités bornées, renormalisée dans le cas stationnaire avec des viscosités non bornées,
- un résultat d'existence d'une solution au sens des distributions pour le système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$,
- un résultat décrivant le système limite satisfait par les suites de solutions du système des équations primitives couplées à l'équation pour l'énergie cinétique turbulente $(M4)$. Un terme supplémentaire apparait a priori dans le second membre de l'équation limite pour l'énergie cinétique turbulente dont on ne sait dire si il est nul ou non.

10) SOURCES

• La référence de base du chapitre 1 est GILL [1] où se trouvent tous les détails de la construction des équations primitives non repris ici. La fin du chapitre reprend LIONS-TEMAM-WANG [1] pour l'adimensionnalisation des équations primitives et la réduction du système. La présentation de l'obtention de la condition aux limites pour la vitesse en surface présente une certaine originalité. Elle a été rédigée sur la base de discussions que l'auteur a eues avec E. DELEERSNIJDER.

• Le résultat principal du chapitre 2 est un résultat d'existence d'une solution aux équations primitives $(M1)$. Ce résultat a été obtenu à l'origine par J.-L. LIONS, R. TEMAM et S. WANG . Les notes manuscrites prises par l'auteur au cours du Professeur J.-L. LIONS donné au Collège de France en 1994 et en 1995, ont servi de base de réflexion à l'élaboration de ce chapitre en particulier et de ce livre en général. On a surtout cherché à écrire une démonstration de ce résultat d'existence d'une solution aux équations primitives qui utilise la méthode de compacité et qui soit compatible avec l'étude des modèles de turbulence et ce, en introduisant le transport tronqué. Cet artefact est apparemment original.

• Une grande partie du chapitre 3 a été rédigée après de nombreuses discussions que l'auteur a eues avec P. DELECLUSE. Le système couplé $(M4)$ est déduit du système TKE utilisé au laboratoire d'océanographie LODYC de l'Université P. M. CURIE. La modélisation du système géostrophico-barotrope semble originale et a été annoncée dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (*cf.* LEWANDOWSKI [2]).

• Dans le chapitre 4, on utilise et on applique les résultats de BOCCARDO-GALLOUËT [1]. Le cas des conditions aux limites non homogènes avec la tension du vent présente des difficultés à cause de la viscosité turbulente. Les résultats que l'on obtient alors semblent originaux ainsi que certaines estimations portant sur l'énergie cinétique turbulente, estimations qui sont entièrement détaillées dans cet ouvrage.

• Le paragraphe 5.1 du chapitre 5 adapte LEWANDOWSKI [1] à la situation présente. Le résultat d'existence de solutions renormalisées dans le cas stationnaire avec des viscosités non bornées (§5.2 et §5.3) a été obtenu à partir d'une idée originale due à F. MURAT qui consiste à montrer une égalité d'énergie pour des troncatures.

• Tous les résultats du chapitre 6 ainsi que ceux de l'appendice A ont été annoncés dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (*cf.* LEWANDOWSKI [2], [3]). Les résulats du §6.1 (système $(M4)$) sont dans la suite de LEWANDOWSKI [1].

11) REMARQUES ADDITIONNELLES

On peut utiliser ce livre comme un manuel. Les parties sont écrites de manière indépendante et les notations ainsi que certains résultats et formules sont fréquemment rappelés. Chaque chapitre commence par un paragraphe intitulé "Orientation" dans lequel on expose les objectifs et les résultats principaux. Les chapitres sont divisés en paragraphes, chacun divisé en sections. On note "la section N.p.q" la q$^{\text{ième}}$ section du paragraphe p du chapitre N. Le paragraphe N.p, noté §N.p, est le p$^{\text{ième}}$ paragraphe du chapitre N. Les formules et les énoncés sont notés de même. Par exemple, le théorème N.p.q est le $\text{q}^{\text{ième}}$ théorème du §N.p. Les systèmes ne suivent pas cette convention. Les systèmes physiques sont notés (EPQ), (CLQ), (PQ), Q numérotant le système. Ces systèmes sont transformés en des systèmes mathématique. Il y en a 14 en tout dans cet ouvrage, numérotés sous la forme (MQ), Q variant entre 1 et 14.

Lorsqu'un résultat ou une formule utilise une formule ou un résultat d'un autre chapitre, le système de numérotation à trois chiffres (*cf.* le début de cette introduction) permet de retrouver très vite le résultat invoqué. C'est pourquoi on peut de manière indépendante après avoir lu le §1.1 (pour les notations de base) :

- lire le chapitre 1 et 3 pour commencer,
- lire le chapitre 2 après avoir lu la conclusion du chapitre 1,
- lire le chapitre 4 où on trouve en particulier les techniques d'estimation pour des équations avec des second membres dans L^1, techniques qui peuvent être utilisées dans beaucoup de problèmes d'équations aux dérivées partielles,
- un lecteur connaissant bien les techniques pour des équations avec un second membre dans L^1 et les problèmes avec des viscosités turbulentes peut aborder directement le chapitre 5 et les §6.2 et 6.3, directement le §6.1 après la lecture du chapitre 2 et peut lire aussi les §5.2 et §5.3 pour la renormalisation de systèmes elliptiques, utile à d'autres problèmes,
- on peut lire directement le §A.1 dans l'appendice A après avoir lu le chapitre 1, et le §A.2 après avoir lu le chapitre 2.

12) REMERCIEMENTS

• Je remercie vivement le Professeur Jacques-Louis LIONS qui m'a suggéré d'écrire ce livre. Il m'a énormément conseillé et encouragé avec beaucoup de patience et de bienveillance. Je lui témoigne ici toute ma gratitude.

• Le Professeur Philippe CIARLET a joué un rôle important dans le bon déroulement de cette publication. Ses conseils m'ont toujours été précieux. Je lui adresse ma reconnaissance ainsi que des remerciements chaleureux.

• Les Professeurs Pascale DELECLUSE, François MURAT et Olivier PIRONNEAU m'ont apporté un enseignement fructueux. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux ont souvent été déterminantes dans l'élaboration de ce travail. Je les remercie chaleureusement.

• Un grand remerciement est adressé au Professeur Christine BERNARDI qui a toujours eu un regard bienveillant et constructif sur mon travail.

• Mes conversations avec le Professeur Tomas CHACON sur la turbulence m'ont toujours été très profitables et motivantes. Je le remercie vivement ainsi que l'ensemble des membres du "Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Anàlisis Numerico" de l'Université de Séville où j'ai été accueilli de nombreuses fois.

• Je remercie l'ensemble des membres de l'équipe MODAL'X de l'Université Paris X-Nanterre, en particulier Christian LÉONARD et Sylvain SORIN.

• Je remercie également Éric DELEERSNIJDER avec qui j'ai pu échanger bon nombre d'idées.

• Dominique BIDOIS, Anne BOISSINOT, Christian DAVID, Nathalie JAMES, Annick RENAULT et Liliane RUPRECHT m'ont souvent donné le petit "coup de main" qui aide beaucoup. Je le leur témoigne ici ma reconnaissance et leur adresse tout mes remerciements.

• Je souhaite enfin remercier le Professeur Hervé LEDRET et Thomas LACHAND-ROBERT qui ont fait preuve de beaucoup de patience pour m'expliquer les subtilités du "TeX", indispensables à la composition technique de cet ouvrage.

CHAPITRE 1

LES ÉQUATIONS PRIMITIVES POUR L'OCÉAN

ORIENTATION

1) L'océan est constitué d'eau salée en gravité sur une "sphère" en rotation. Son évolution est décrit par

— la vitesse $\overrightarrow{U}$ du fluide,
— la densité ρ,
— la température T et la salinité S,
— la pression p.

On établit dans ce chapitre un système physique d'équations primitives satisfait par ces variables aux échelles climatiques ($(EP1)$ dans le texte, section 1.3.5) et un système de conditions aux limites appropriées ($(CL1)$ dans le texte, section 1.5.2). L'ensemble $(EP1)$-$(CL1)$ est transformé en un système mathématique ($(M1)$, section 1.6.4). Les notations sont précisées au fur et à mesure des besoins.

2) Les principales étapes pour obtenir les équations primitives sont :

- description du domaine d'étude Ω avec lequel on travaille (§1.1),
- définition du nombre de Rossby et du quotient d'aspect (§1.1),
- définition des variables et des coefficients qui interviennent dans le problème puis écriture des équations de Navier-Stokes combinées à une équation d'état et au bilan d'énergie (système $(B1)$, section 1.2.5),
- approximations déduites de l'analyse des ordres de grandeurs (§1.3).

Le nombre de Rossby et le quotient d'aspect permettent de définir les échelles des phénomènes étudiés, les équations de Navier-Stokes sont écrites pour un fluide tournant gravitationnel, l'équation d'état est déduite de faits d'expérience.

3) Des conditions aux limites sont nécessaires pour la vitesse, la température et la salinité (voir §1.4). Le problème le plus difficile est la détermination de ces conditions en surface, aux lieux où l'air et l'eau sont en contact. Nous distinguons :

- *le problème dynamique,* trouver les conditions en surface pour la vitesse,

- *le problème thermodynamique,* trouver les conditions en surface pour T et S.

L'interface air-mer est turbulente. Une analyse de la turbulence à cet interface permet d'écrire les conditions aux limites pour la vitesse en surface (§1.4, condition $(1.4.12)$ dans le texte) sous l'hypothèse dite "du toit rigide". Les ingrédients du problème thermodynamique sont le rayonnement solaire, les changements de phases et les échanges de chaleur entre l'air et l'eau (chaleur latente et chaleur sensible) (§1.5).

4) Il faut ensuite pouvoir poser le problème de mathématique déduit du système physique des équations primitives, problème étudié dans le chapitre 2. Pour cela, on adimensionnalise les variables et les coefficients. Après des simplifications où principalement

- on regroupe les variables jouant le même rôle,
- on élimine la pression et la densité grâce à l'équation hydrostatique en introduisant la pression superficielle p_s sur le toit de l'océan,

on écrit le *système minimal* qui contient le nombre d'équations suffisant au calcul de toutes les quantités ($(M1)$ dans le texte section 1.6.4).

1. 1 — DOMAINE ET ÉCHELLES

1.1.1 — DOMAINE D'ÉTUDE

Un point dans l'océan est repéré par sa latitude, sa longitude et sa profondeur. Bien que ce système de coordonnées sphériques soit celui qu'il faut utiliser en océanographie, il conduit à des équations abstraites assez lourdes qui ont les mêmes propriétés qualitatives que lorsqu'elles sont écrites dans un système de coordonnées cartésiennes. En travaillant dans un système de coordonnées cartésiennes, on simplifie le formalisme sans trop changer la structure mathématique du problème.
Soient Γ_s un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^2$ et

$$H : \Gamma_s \longrightarrow \mathbb{R},$$

une application de classe C^1 telle que

$$\min_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x,y) > 0. \tag{1.1.1}$$

L'inégalité $(1.1.1)$ est une hypothèse technique nécessaire à l'analyse ultérieure des systèmes. Cette hypothèse suppose l'existence de parois latérales que l'on note Γ_l, qui peuvent être les côtes ou bien encore des frontières artificielles.
On définit l'ouvert Ω par

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \Gamma_s \times \mathbb{R}\,;\, -H(x,y) \le z \le 0\}.$$

- *On travaille avec l'ouvert* Ω *tout au long de ce livre et on suppose toujours que* (1.1.1) *a lieu.*

L'ouvert Ω est représenté sur la figure 1.1,

Le fond de l'océan est décrit par la surface $z = -H(x, y)$, notée Γ_f. La surface de Ω est une surface moyenne et est appelée le toit de l'océan. On la suppose fixée : c'est *l'hypothèse du toit rigide*. Présentée ainsi, l'hypothèse du toit rigide est incorrecte mais on ne peut pas procéder autrement. Elle prendra son sens ultérieurement lors de l'étude de la turbulence à l'interface air-mer dans la section 1.4.4. On désigne encore par Γ_s le toit de l'océan. Donc en résumé, on note

— Γ_s la surface de l'océan (ou toit de l'océan),
— Γ_l les parois latérales,
— Γ_f le fond de l'océan.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ une base orthonormale de $I\!R^3$. Le vecteur $\vec{k}$ est choisi parallèle et orienté de la même façon que le vecteur normal extérieur à Γ_s. Étant donné $M \in \partial\Omega$, $\vec{n} = \vec{n}\ (M)$ désigne le vecteur normal extérieur à Ω. Il faut observer que ce vecteur n'est pas défini aux lieux du contact entre Γ_s et Γ_l ainsi qu'entre Γ_l et Γ_f. Ce domaine est néanmoins Lipschitzien et à frontière C^1 par morceau, ce qui fait que les résultats standards d'analyse y sont valables.

On note O un point fixé de l'espace et (x, y, z) le système de coordonnées euclidiennes correspondant. C'est-à-dire qu'un point M de l'espace est repéré par

$$\vec{OM} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{k}\ .$$

On écrit en général M plutôt que $\vec{OM}$.

1.1.2 — DÉFINITION DES ÉCHELLES

Chaque phénomène marin admet :

— un temps caractéristique d'évolution τ,
— une longueur caractérique verticale L_v,
— une longueur caractérique horizontale L_h.

Les temps caractéristiques sont comparés au temps de révolution terrestre, déterminé par le module de *la vitesse angulaire* de la terre

$$\omega \approx 7,3.10^{-5}\, s^{-1}. \tag{1.1.2}$$

Les échelles spatiales sont estimées par le rapport entre la longueur caractéristique verticale L_v et la longueur caractéristique horizontale L_h. Donc chaque phénomène marin est caractérisé par les nombres sans dimension :

— *le nombre de Rossby,*

$$Ro \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\,\omega\,\tau}, \tag{1.1.3}$$

— *le quotient d'aspect,*

$$\delta \stackrel{def}{=} \frac{L_v}{L_h}. \tag{1.1.4}$$

- Lorsque $Ro \gg 1$, le phénomène étudié n'est pas sensible à la rotation de la terre, ce qui est le contraire lorsque $Ro \ll 1$,
- lorsque $\delta \ll 1$, le phénomène étudié est anisotrope.

La couche que constitue l'océan sur la terre est très mince par rapport aux dimensions de la planète. Par conséquent tout phénomène global à grande échelle de temps et d'espace satisfait

$$Ro \ll 1, \quad \delta \ll 1.$$

1.1.3 — CLASSIFICATION DES ÉCHELLES

Les phénomènes marins ont lieu à des gammes d'échelles très différentes. Celles-ci sont classées dans DELEERSNIJDER [1] de la manière suivante.

- *Micro échelle* : $7.10^2 \leq Ro \leq 7.10^3$ et $\delta = 1$. C'est l'échelle finale de la turbulence, à laquelle l'énergie transmise des grandes échelles se dissipe par effet visqueux, modélisé ultérieurement par des viscosités turbulentes (*cf.* aussi §1.4 et le chapitre 3).
- *Échelle médiane* : $7 \leq Ro \leq 70$ et $\delta \leq 1$. Ce sont les échelles où sont visibles les ondes courtes et tous les effets turbulents dus à la stratification océanique.
- *Méso échelle* : $Ro \approx 0,7$ et $\delta \ll 1$. C'est l'ordre de grandeur des conséquences du forçage des marées et des tempêtes (provoquant les ondes de POINCARÉ). On y distingue aussi les ondes internes longues et les oscillations d'inertie, les phénomènes journaliers dus à l'alternance du jour et de la nuit et les ondes de Rossby issues de la rotation terrestre. Mais cette échelle est surtout l'échelle des tourbillons turbulents océaniques bidimensionnels capables d'agir en cascade inverse en transmettant de l'énergie aux grandes échelles. Leur modélisation reste un problème ouvert.
- *Échelle climatique* : $Ro \leq 0,007$ et $\delta \ll 1$. Les phénomènes rencontrés à ces échelles résultent de la circulation générale due au forçage météorologique et ont des temps caractéristiques de l'ordre du mois. Ces phénomènes sont anisotropes.

On s'intéresse dans ce livre aux ***échelles climatiques****. Pour fixer les idées, on choisit*

$$\delta \approx 10^{-4}, \quad L_v = 10\,m, \quad L_h = 10^5\,m = 100\,km, \quad Ro \leq 0,007,$$

qui sont les ordres de grandeur utilisés dans DELEERSNIJDER [1] *et aussi dans* BLANKE [1].

REMARQUE 1.1.1 — Cette classification est linéaire. Elle ne tient pas compte des échelles convectives définies pour des δ plus grands que 1 et des temps τ de l'ordre de la semaine. On y distingue par exemple la formation d'eaux denses et froides en surface aux pôles qui en coulant refroidissent le fond de l'Océan. Ce type de phénomènes aurait théoriquement des conséquences aux échelles paléolithiques (de l'ordre de18 000 ans). $\diamondsuit$

• *Pour tenir compte de l'anisotropie des phénomènes marins aux échelles climatiques, on note dans tout ce livre le Laplacien d'une distribution ϕ sur Ω*

$$\Delta_c\phi = \Delta\phi + \partial^2_{zz}\phi,$$

avec $\Delta\phi = \partial^2_{xx}\phi + \partial^2_{yy}\phi$. La divergence d'un champ de vecteurs est notée

$$div_c\overrightarrow{U} = div\overrightarrow{v} + \partial_z w, \quad \overrightarrow{U} = \overrightarrow{v} + w\,\overrightarrow{k} = u\,\overrightarrow{e}_1 + v\,\overrightarrow{e}_2 + w\,\overrightarrow{k},$$

avec $div\overrightarrow{v} = \partial_x u + \partial_y v$. On utilise la même convention pour tous les autres opérateurs différentiels.

Le cadre géométrique étant mis en place, on définit dans le paragraphe suivant les variables étudiées. On écrit ensuite les équations de la mécanique des fluides pour un fluide tournant gravitationnel combinées à des faits expérimentaux.

1. 2 — ÉQUATIONS DE BASE

1.2.1 — DÉFINITION DES VARIABLES ET DES CONSTANTES

L'état de la mer est défini en un point $M \in \Omega$ et à une date $t \in [0, \mathcal{T}]$ ($\mathcal{T} > 0$ est fixé) par les variables suivantes.

• *La vitesse* d'un volume infinitésimal de fluide autour de M à la date t,

$$\overrightarrow{U}\,(t, M) = \overrightarrow{U} = \overrightarrow{v} + w\,\overrightarrow{k},$$

où on a noté $\overrightarrow{v} = u\,\overrightarrow{e}_1 + v\,\overrightarrow{e}_2$ la vitesse horizontale et w la vitesse verticale. La vitesse est mesurée en $m.s^{-1}$.

• *La densité* $\rho = \rho(t, M)$, c'est-à-dire la masse d'eau contenue dans un volume infinitésimal autour du point M à la date t. La masse d'eau totale à la date t dans un ouvert $U \subset \Omega$ vaut

$$m(t, U) = \int_U \rho(t, M)\, dM.$$

La densité est mesurée en $kg.m^{-3}$. Sa valeur caractéristique est de l'ordre de

$$\rho_0 \approx 1035\, kg.m^{-3}.$$

On constate expérimentalement que ρ varie d'environ 2 % par rapport à ρ_0.

• *La pression* $p = p(t, M)$. Un volume $U \subset \Omega$ est soumis à une force de pression dont le module vaut

$$F_p = \int_{\partial U} p \, d\sigma.$$

La pression est mesurée en $N.m^{-2}$.

• *La température* $T = T(t, M)$ et *la salinité* $S = S(t, M)$. La masse totale de sel dans un volume $U \subset \Omega$ à la date t vaut

$$s(t, U) = \int_U \rho(t, M) \, S(t, M) \, dM.$$

La température est mesurée en Kelvin (K). Définie de cette manière, S est sans dimension. Il y a en moyenne $3,5 \, kg$ de sel dans un m^3 d'eau. On ne donne pas en général un ordre de grandeur pour T dont les variations sont plus importantes que celles de S.

On note aussi,

— μ la viscosité moléculaire de l'eau,
— $\mathcal{K}_c^t, \mathcal{K}_c^s$ les coefficients de diffusion moléculaire pour la température et pour la salinité,
— c_p le coefficient de chaleur spécifique,
— $g \approx 9,81 \, m.s^{-2}$ le coefficient de gravité.

On obtient dans les sections suivantes les équations de base portant sur $\overrightarrow{U}$, p, ρ, S et T à partir :

• *d'un fait d'expérience*, on écrit une équation d'état reliant ρ, S, T et p,
• *de lois physiques*, ce sont les équations de Navier-Stokes (la loi de gravitation universelle conduit à l'équation pour la vitesse, les lois de conservation aux équations pour la température et la salinité).

1.2.2 — L'ÉQUATION D'ÉTAT

L'expérience montre que la mesure de la densité ρ se déduit de la mesure de la salinité, de la température et de la pression. Sur cette constatation, on écrit une équation d'état

$$\rho = \rho(S, T, p). \tag{1.2.1}$$

Les exemples que l'on trouve dans GILL [1] montrent que ces lois, déduites de mesures expérimentales, sont le plus souvent polynômiales par rapport à S, T et p.
Il faut noter que les coefficients μ, $\mathcal{K}_c^t$, $\mathcal{K}_c^s$ et c_p dépendent aussi de S, T et p. Les approximations faites dans le §1.3 rendent inutiles l'expression exacte de ces lois d'état (*cf.* les tables dans GILL [1]).

1.2.3 — ÉQUATION DYNAMIQUE

On écrit dans cette section l'équation de Navier-Stokes pour l'océan qui est une conséquence de la loi de la gravitation universelle. Il faut donc commencer par faire le bilan des forces auxquelles est soumis le système.

L'océan est un fluide tournant gravitationnel. Donc outre les forces de pression, il est soumis à la force de Coriolis $\vec{C}$ et à la force de gravité $\vec{G}$,

$$\vec{C} \overset{def}{=} -2\rho\vec{w} \times \vec{U}, \quad \vec{G} \overset{def}{=} -\rho g\,\vec{k},$$

où $\vec{w}$ est la vitesse angulaire de la terre, supposée constante. En un point donné de la terre, la force de Coriolis est de la forme

$$\vec{C} = -2\rho\omega(cos(\theta)\,\vec{k} \times \vec{U} + sin(\theta)\,\vec{e}_2 \times \vec{U}),$$

où θ est la colatitude du point considéré et $\omega = \mid \vec{\omega} \mid$ (*cf.* (1.1.2)). Dans cette présentation, la variable y joue le rôle de θ. C'est pourquoi on écrit

$$\vec{C} = -2\rho\omega\,(f(y)\,\vec{k} \times \vec{U} + h(y)\,\vec{e}_2 \times \vec{U}), \tag{1.2.2}$$

où f et h sont deux fonctions régulières comprises entre -1 et 1 qu'il est inutile de préciser ici, car dans la suite on prend f constant et le terme $h(y)\,\vec{e}_2 \times \vec{U}$ est négligé. A priori, la fonction f est maximale aux pôles et nulle à l'équateur.

Enfin, on montre que les contraintes du fluide s'expriment par (*cf.* LANDAU-LIFCHITZ [1])

$$I = div_c(\mu[\nabla_c\vec{U} + \nabla_c\vec{U}^T]) + \lambda\nabla_c(div_c\vec{U}),$$

où λ est la “deuxième viscosité". Dans les conditions usuelles, on fait l'approximation

$$I \approx div_c(\mu\nabla_c\vec{U}).$$

En écrivant que les forces extérieures sont compensées par les forces de pression et les contraintes, on obtient, en appliquant la loi de Newton, l'équation de Navier-Stokes (1.2.3) pour un fluide Newtonnien tournant gravitationnel,

$$\rho\,\frac{D\vec{U}}{Dt} - \mu\Delta_c\vec{U} = -\nabla_c p + \vec{G} + \vec{C}, \tag{1.2.3}$$

en supposant μ constant pour simplifier et où l'on note pour une distribution quelconque ψ,

$$\frac{D\psi}{Dt} \overset{def}{=} \partial_t\psi + \vec{U}\,.\,\nabla_c\psi,$$

formule qui définit la dérivée totale suivant le champ de vecteurs $\vec{U}$.

1.2.4 — LOIS DE CONSERVATIONS

Les différentes lois de conservation pour la masse, la température et la salinité s'expriment comme suit (voir les détails dans GILL [1]) :

• le principe de conservation de la masse,

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{D\rho}{Dt} = -\,div_c\vec{U}, \tag{1.2.4}$$

• la conservation de l'énergie combinée aux effets de diffusion,

$$\rho\, c_p\,\frac{DT}{Dt} + T\left(\frac{\partial_T\rho}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt} = \mathcal{K}_c^t\Delta_c T, \tag{1.2.5}$$

où l'on note $\partial_T\rho = (\partial\rho/\partial T)$ (*cf.* l'équation d'état $(1.2.1)$),
• la conservation du sel combinée aux effets de diffusion,

$$\frac{D(\rho\, S)}{Dt} = \mathcal{K}_c^s\Delta_c S. \tag{1.2.6}$$ ♢

1.2.5 — BILAN DES ÉQUATIONS

L'ensemble des équations de base $(1.2.1)$, $(1.2.3)$, $(1.2.4)$, $(1.2.5)$ et $(1.2.6)$ est résumé dans le système de base $(B1)$ suivant, dans lequel on distingue la vitesse horizontale $\vec{v}$ et la vitesse verticale w et où l'on a explicité les opérateurs de dérivation et la force de Coriolis $(1.2.2)$,

$$(B1)\quad\begin{cases}(a) & \begin{cases}\rho\,\partial_t\vec{v} + \rho\,(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + \rho\,w\,\partial_z\vec{v} - \mu\Delta_c\vec{v} - \\ 2\omega\rho\,(f(y)\,\vec{k}\times\vec{v} + h(y)w\,\vec{e}_1) + \nabla p = 0,\end{cases}\\ (b) & \begin{cases}\rho\,(\partial_t w + (\vec{v}\,\nabla)w + w\,\partial_z w) - \mu\Delta_c w - \\ 2\,\omega u\,h(y) + \rho g + \partial_z p = 0,\end{cases}\\ (c) & \partial_t\rho + div_c(\rho\vec{U}) = 0,\\ (d) & \rho = \rho(S,T,p),\\ (e) & \rho c_p\,(\partial_t T + (\vec{v}\,\nabla)\,T + w\,\partial_z T) - \mathcal{K}_c^t\Delta_c T + T\left(\frac{\partial_T\rho}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt} = 0,\\ (f) & \rho\,(\partial_t S + (\vec{v}\,\nabla)\,S + w\,\partial_z S) - \mathcal{K}_c^s\Delta_c S = 0.\end{cases}$$

Il faut noter que l'équation $(B1, f)$ diffère de $(1.2.6)$. Elle se déduit de $(1.2.6)$ en utilisant $(1.2.4)$.

1. 3 — PRINCIPALES APPROXIMATIONS

1.3.1 — POSITION DU PROBLÈME

On pourrait utiliser le modèle $(B1)$ pour décrire et simuler numériquement la circulation océanique à grande échelle. Cependant, on n'est pas actuellement en mesure d'analyser ce système tant du point vue mathématique que numérique. C'est pourquoi on effectue un certain nombre d'approximations. On distingue celles dues à

• un fait d'expérience,
• une loi d'échelle ou une analyse des ordres de grandeur.

Un fait d'expérience permet de simplifier l'équation $(B.1, c)$ de la conservation de la masse (aproximation de Boussinesq). On en déduit une simplification de la conservation de l'énergie $(B1, e)$ (équation de la chaleur), et la loi d'état $(B1, d)$ (linéarisation et indépendance de la pression).
Grâce à des lois d'échelles ou d'ordres de grandeur, on néglige certains termes de la force de Coriolis dans l'équation $(B1, a)$ et on obtient l'équation hydrostatique à partir de l'équation $(B1, b)$.
D'une manière générale, on note $O(W)$ l'ordre de grandeur caractéristique d'une quantité W.

1.3.2 — L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ ET SES CONSÉQUENCES

L'expérience établit que la densité ρ varie d'environ $d\rho = 2$ % autour de la valeur de référence ρ_0. Par conséquent,

$$O\left(\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right) \approx \frac{d\rho}{\rho_0}\tau^{-1} \approx 2.10^{-5}\tau^{-1}$$

alors que $O(div_c \vec{U}) = \tau^{-1}$, ce qui entraine

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \ll div_c \vec{U} \,. \tag{1.3.1}$$

En reportant $(1.3.1)$ dans l'équation de conservation de la masse $(1.2.4)$, on obtient

$$div_c \vec{U} = 0. \tag{1.3.2}$$

L'égalité $(1.3.2)$ est *l'approximation de Boussinesq*.

L'approximation de Boussinesq revient à considérer que certains termes de compressibilité ont une influence négligeable sur le système $(B1)$. Sur cette base, on simplifie l'équation de l'énergie $(B1, e)$ (écrite sous la forme $(1.2.5)$) en

$$c_p\rho\frac{DT}{Dt} - \mathcal{K}_c^t \Delta_c T = 0. \tag{1.3.3}$$

De même, du fait des faibles variations de la densité, on peut négliger la dépendance en pression dans l'équation d'état $(B1, d)$ puis la linéariser autour de la valeur de référence ρ_0. En tenant compte du fait que la densité augmente lorsque la salinité augmente et qu'elle diminue lorsque la température augmente, on écrit

$$\rho = \rho_0 + \rho_S(S - S_0) - \rho_T(T - T_0), \tag{1.3.4}$$

$\rho_S \geq 0$, $\rho_T \geq 0$, T_0 et S_0 sont des constantes que l'on peut calculer à l'aide des tables dans GILL [1].

REMARQUE 1.3.1 — Nous revenons sur les approximations $(1.3.3)$ et $(1.3.4)$ dans l'appendice A, qui sont à la base du problème posé dans cet appendice. Il est cependant indispensable sur le plan des mathématiques de comprendre dans un premier temps le problème posé par la circulation océanique avec les approximations $(1.3.3)$ et $(1.3.4)$ avant d'aller plus loin. $\diamondsuit$

Nous achevons cette section en définissant les coefficients suivants, considérés comme constants,

— $\nu = (\mu/\rho) \approx 10^{-6}\, m^2.s^{-1}$ est la viscosité cinématique,

— $\mathcal{K}_T \stackrel{def}{=} (\mathcal{K}_c^t/\rho\, c_p) \approx 1,4.10^{-7}\, m^2.s^{-1}$ est la diffusivité thermique,

— $\mathcal{K}_S \stackrel{def}{=} (\mathcal{K}_c^s/\rho) \approx 1,5.10^{-9}\, m^2.s^{-1}$ est la diffusivité saline,

les valeurs numériques étant celles de GILL [1].

1.3.3 — L'ÉQUATION HYDROSTATIQUE

Considérons un verre rempli d'eau de densité constante ρ_0 se trouvant au repos. La pression P de l'eau dans ce verre à une profondeur z (ici z est une valeur algébrique) vaut

$$P \,=\, P_s - \rho_0\, g\, z,$$

P_s étant la pression à la surface. Ceci s'écrit encore

$$\partial_z P \,=\, - \,\rho_0\, g. \tag{1.3.5}$$

L'équation $(1.3.5)$ est *l'équation hydrostatique*. Bien que valable en toute rigueur pour un fluide au repos, cette équation est aussi utilisée en océanographie. Son usage se justifie par une analyse des ordres de grandeur. On réécrit l'équation pour la vitesse verticale $(B1, b)$ sous la forme

$$\frac{Dw}{Dt} - \nu\Delta_c w - 2\,\omega\, u\, h(y) \,+\, g \,+\, \frac{1}{\rho}\,\partial_z p = 0. \tag{1.3.6}$$

En utilisant les ordres de grandeur définis dans la section 1.1.3 aux échelles climatiques, on a

$$O\left(\frac{Dw}{Dt}\right) = \frac{W}{\tau} = \frac{L_v}{4\,\omega^2 Ro^2} = 10^{-11}\, m.s^{-1},$$

tandis que

$$O(\nu\Delta_c w) = O(\nu)\,\frac{W}{L_v^2} = O(\nu)\frac{\delta}{2\,\omega Ro\, L_v} = 10^{-8}\, m.s^{-1},$$

ceci en se servant de la valeur numérique de ν donnée dans la section précédente. Enfin, puisque $|h(y)| \leq 1$, on a

$$O\,(2\,\omega\,u\,h(y)) \leq 10^{-6}\,m.s^{-1}.$$

Étant donné que $O(g) \approx 10\,m.s^{-1}$, on observe que

$$A \stackrel{def}{=} \frac{Dw}{Dt} - \nu\Delta_c w - 2\omega u\,h(y) \ll g,$$

ce qui assure que $A + g \approx g$. Par conséquent, sur l'axe vertical la force de gravité ne peut être compensée que par la projection des forces de pression. On peut alors approcher l'équation (1.3.6) par

$$\partial_z p \;= -\rho\, g \tag{1.3.7}$$

qui est bien l'équation hydrostatique. Obtenue apparemment à partir d'ordres de grandeurs, cette équation est bien la conséquence d'une loi d'échelle et est valable lorsque le quotient d'aspect δ est petit. Cette affirmation est confirmée par le travail d'adimensionnalisation du §1.6 (*cf.* l'équation 1.6.1).

1.3.4 — ORDRES DE GRANDEUR DES VITESSES ET FORCE DE CORIOLIS

Toujours en utilisant les mêmes ordres de grandeur, on calcule ceux de la vitesse horizontale et verticale :

$$O(\vec{v}\,) \stackrel{def}{=} V = \frac{L_h}{2\,\omega Ro} = 0.1\,m.s^{-1}, \quad O(w\,\vec{k}\,) = \frac{L_v}{2\,\omega Ro} \stackrel{def}{=} W = 10^{-5}\,m.s^{-1}.$$

On note que $W \ll V$.

On déduit de cette analyse des ordres de grandeur que là où h et f sont comparables,

$$O(h(y)w\,\vec{k}\,) \ll O(f(y)\,\vec{v}\,),$$

de sorte que la force de Coriolis définie par (1.2.5) se simplifie en

$$\vec{C} \approx f(y)\,\vec{k}\,\times\vec{U} = \;f(y)\,\vec{k}\,\times\,\vec{v}\;. \tag{1.3.8}$$

Par conséquent, l'équation $(B1, a)$ devient en utilisant la définition de la viscosité cinématique ν (*cf.* section 1.3.2),

$$\partial_t\vec{v}\, + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}\, + w\,\partial_z\vec{v}\, - \nu\Delta_c\vec{v}\, + f\;\,\vec{k}\,\times\,\vec{v}\, + \frac{\nabla p}{\rho} = 0. \tag{1.3.9}$$

• Toujours sur la base de l'approximation de Boussinesq, on prend $\rho = \rho_0$ dans (1.3.9).

Il faut noter que l'approximation faite sur la force de Coriolis n'est pas valable à l'équateur puisque le coefficient f y est nul. Pourtant, à notre connaissance, tous les modèles océanique utilisent quand même cette approximation à l'équateur. Dans la suite, on prend f constant pour simplifier.

1.3.5 — BILAN DES ÉQUATIONS

Lorsque l'on résume l'ensemble des approximations faites dans les sections 1.3.2, 1.3.3 et 1.3.4, on réduit le système $(B1)$ au système (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4), (1.3.7), (1.3.9) combiné aux approximations de la fin de la section 1.3.2, que l'on écrit sous la forme

$$(EP1) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t \vec{v} + (\vec{U}\nabla_c)\,\vec{v} - \nu\Delta_c\vec{v} + f\,\vec{k}\times\vec{v} + \dfrac{\nabla p}{\rho_0} = 0, \\ (b) & \partial_z p = -\rho\, g, \\ (c) & div_c \vec{U} = 0, \\ (d) & \rho = \rho_0 + \rho_S(S - S_0) - \rho_T(T - T_0), \\ (e) & \partial_t T + (\vec{U}\nabla_c)T - \mathcal{K}_T\Delta_c T = 0, \\ (f) & \partial_t S + (\vec{U}\nabla_c)S - \mathcal{K}_S\Delta_c S = 0. \end{cases}$$

On appelle ce système les "*équations primitives pour l'océan*". Il aurait été utilisé pour la première fois sous cette forme dans BRYAN [1] (1973) pour des simulations numériques.

Ce système suggère quelques commentaires.
— Il n'y a pas de terme d'évolution pour la composante verticale de la vitesse w dans $(EP1)$.
— On pourrait rajouter un terme au second membre de $(EP1, e)$ pour tenir compte des rayons solaires dans l'équation de la chaleur. Ceux-ci pénètrent sur une dizaine de mètres de profondeur, ce qui est négligeable à grande échelle dans l'équation elle-même. Nous tenons compte de la pénétration solaire dans les conditions aux limites étudiées dans les paragraphes suivants.
— Ces équations ne tiennent pas compte de la turbulence. Sa modélisation est esquissée dans le §1.4 pour l'étude des conditions aux limites et fait l'objet du chapitre 3.
— Ce système n'est pas un système incompressible malgré l'équation $(EP1, c)$. La densité n'est pas constante et vérifie une équation d'advection-diffusion grâce à $(EP1, d)$, $(EP1, e)$ et $(EP1, f)$. $\diamondsuit$

Les équations étant posées, il faut des conditions aux limites. Les variables pronostiques dans le système $(EP1)$ (*i.e.* avec un terme d'évolution) sont $\vec{v}$, T et S (et par suite ρ). Ce sont ces variables pour lesquelles des conditions aux limites sont nécessaires sur $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_l \cup \Gamma_f$. C'est l'objet des deux paragraphes suivants. Le premier étudie le problème dynamique (vitesse) et l'autre le problème thermodynamique (température et salinité).

1. 4 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA VITESSE

1.4.1 — POSITION DU PROBLÈME

Ce paragraphe a pour but la détermination des conditions aux limites pour la vitesse. Nous distinguons le problème posé par l'interface air-mer Γ_s du problème posé par le fond et les parois latérales $\Gamma_f \cup \Gamma_f$.
En ce qui concerne $\Gamma_f \cup \Gamma_f$, le problème est relativement simple dans la mesure où l'on ne tient pas compte des phénomènes à petite échelle (embouchure des fleuves, infiltration de l'eau dans le sol par exemple). En revanche, l'interface air-mer pose un problème plus délicat.

On note en premier lieu que

- sur Γ_s, qui est fixe, l'hypothèse du toit rigide (*cf.* §1.1) implique

$$w|_{\Gamma_s} = 0, \tag{1.4.1}$$

- sur $\Gamma_f \cup \Gamma_l$, l'hypothèse classique de non adhérence entraine

$$\vec{U} . \vec{n}\ |_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0. \tag{1.4.2}$$

Sur les cotés et au fond (*i.e.* sur $\Gamma_f \cup \Gamma_l$) la vitesse est nulle. Aussi pose t-on

$$\vec{U}\ |_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0. \tag{1.4.3}$$

La condition (1.4.3) implique la condition (1.4.2) qui devient superflue. Cela règle le problème posé par $\Gamma_f \cup \Gamma_l$.

On revient maintenant sur le problème posé par l'interface air-mer Γ_s. Classiquement en mécanique des fluides, on obtient des conditions aux limites à l'interface de deux fluides en écrivant que le saut des contraintes est nul et que la surface libre est une surface de courant (*cf.* LANDAU-LIFCHITZ [1]). Dans le cas présent, les équations obtenues par ce procédé sont inadaptées à un calcul numérique et débouchent sur un problème de mathématiques entièrement ouvert, car l'interface est turbulente et que l'on fait l'hypothèse du toit rigide. Les conditions obtenues dans ce qui suit sont des conditions de flux pour des quantités moyennes (*i.e.* des conditions de Neumann). La condition aux limites pour une moyenne de $\vec{v}$ (encore notée $\vec{v}$) est l'égalité (1.4.12) dans le texte (section 1.3.4),

$$\nu_t\, \partial_z \vec{v} = C_f\, \vec{\mathrm{v}}, \tag{1.4.12}$$

en notant $\vec{\mathrm{v}}$ la tension du vent (*cf.* $(1.4.11)$), C_f une constante et ν_t une viscosité turbulente. Cette condition exprime le forçage de l'atmosphère sur l'océan. Elle est valable après avoir modélisé la turbulence de la couche de mélange air-mer qui devient le toit de l'océan vu comme une interface fixe moyenne : c'est l'hypothèse du toit rigide. On met dans la condition $(1.4.12)$ toute l'information concernant la couche de mélange, incluant la surface libre.

La condition $(1.4.12)$ est le résultat principal de ce paragraphe dont le plan est :

- rappel succinct de généralités sur la turbulence et le problème de Reynolds,
- raccordement abstrait des flux à l'interface fixe de deux fluides non miscibles quelconques,
- application à l'inteface air-mer et obtention de la condition $(1.4.12)$.

1.4.2 — RAPPELS SUR LE PROBLÈME DE REYNOLDS ET LA TURBULENCE

Soit le problème abstrait d'un fluide de viscosité ν emplissant un ouvert $\mathcal{O}$ quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soumis à une force donnée dépendant de la vitesse de manière affine. On écrit l'équation de Navier-Stokes pour ce fluide sous la forme abstraite générale

$$\partial_t \vec{W} + (\vec{W} \nabla_c) \vec{W} - \nu \Delta_c \vec{W} + \frac{\nabla P}{\rho} = \vec{F}\,(\vec{W}). \tag{1.4.4}$$

Le problème de Reynolds présenté ici se pose dans le cas compressible et dans le cas incompressible. La difficulté à laquelle nous nous intéressons étant la même dans les deux cas, nous considérons le cas incompressible afin de simplifier la présentation. Les deux cas sont étudiés de manière détaillée dans MOHAMMADI-PIRONNEAU [1] (1994). Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini par

$$R \overset{def}{=} \frac{WL}{\nu}, \tag{1.4.5}$$

où L est une longueur caractéristique et W une vitesse caractéristique. Ce nombre est sans dimension et caractérise l'écoulement. Lorsqu'il devient très grand (supérieur à 10^3), le fluide développe une structure hératique et tourbillonnaire, les tourbillons existant depuis les échelles macroscopiques aux petites échelles de longueur. Dans l'océan, ces petites échelles sont de l'ordre du mm et les grandes échelles peuvent aller de la dizaine de mètres à la dizaine de km. On dit que le fluide devient turbulent. Il n'est alors pas aisé de rendre compte de tous les détails de la turbulence, tant sur le plan physique que sur le plan numérique. On trouvera dans RUELLE-TAKENS [1] (1971) un exposé de base sur la nature de la turbulence.

Puisque l'on s'intéresse aux propriétés macroscopiques de l'écoulement, on introduit des grandeurs moyennées. Dans la pratique, on utilise des moyennes spatiales, temporelles ou statistiques. Pour une quantité ψ quelconque, on pose

$$\psi \overset{def}{=} \psi_m + \psi',$$

où ψ_m est la moyenne de ψ, ψ' sa fluctuation autour de ψ_m. On impose au filtre de moyenne de satisfaire aux conditions (*cf.* MOHAMMADI-PIRONNEAU [1]), en notant $(\xi_1, ..., \xi_n)$ les coordonnées d'un point dans $I\!R^n$,

$$(\psi')_m = 0, \quad (\partial_t \psi)_m = \partial_t(\psi_m), \quad \forall\, k = 1, ..., n, \ \ (\partial_{\xi_k}\psi)_m = \partial_{\xi_k}(\psi_m).$$

On note $(w_1, ..., w_n)$ les coordonnées de $\vec{W}$. En moyennant $(1.4.4)$ suivant ce filtre de moyenne, on obtient

$$(1.4.6) \quad \partial_t \vec{W}_m + (\vec{W}_m \nabla_c)\vec{W}_m + div_c(\vec{W}'\vec{W}') - \nu\Delta_c \vec{W}_m + \frac{\nabla P_m}{\rho} = \vec{F}\,(\vec{W}_m).$$

On note

$$\mathcal{R} \stackrel{def}{=} \vec{W}'\vec{W}' = (w_i' w_j')_{1 \le i,j \le n}$$

le tenseur de Reynolds. On a

$$div_c(\mathcal{R}) = div_c(\vec{W}'\vec{W}') = \partial_{\xi_i}(w_i' w_j'),$$

en utilisant la convention des indices répétés. Notons que le champ moyen ainsi que la fluctuation restent à divergence nulle.
La détermination rigoureuse du tenseur de Reynolds est un problème ouvert. L'hypothèse la plus largement admise est que ce tenseur est proportionnel au gradient du champ moyen. Cette hypothèse, dite de Reynolds, se justifie par le fait que les phénomènes à grande échelle transmettent de l'énergie à la cascade des échelles inférieures. La plus petite en dissipe une partie et en restitue l'autre aux plus grandes échelles en cascade inverse. C'est du point de vue de la grande échelle un processus de diffusion. On pose

$$(1.4.7) \qquad \mathcal{R} = -\nu_t\, \nabla_c \vec{W}_m\ .$$

La grandeur ν_t est une *viscosité turbulente*. Sa détermination est en général déduite d'hypothèses physiques adaptées au cadre de l'étude menée et d'analyses dimensionnelles (*cf.* section 1.4.5, égalité $(1.4.14)$). Les phénomènes de diffusion turbulente sont prédominants devant les autres phénomènes de diffusion qui sont souvent négligés.
Il n'existe à ce jour et à notre connaissance aucun argument mathématique permettant de confirmer ou d'infirmer ces hypothèses de manière décisive. Mentionnons toutefois les travaux de KOLMOGOROV [1] (1942) dans ce sens. Nous insistons sur le fait que c'est actuellement le seul outil simple disponible pour simuler numériquement la turbulence tridimensionnelle (*cf.* LAUNDER-SPALDING [1]).

1.4.3 — CONDITION D'INTERFACE

On établit dans cette section les conditions d'égalité de flux à l'interface fixe de deux fluides quelconques non miscibles, l'ensemble étant considèré comme un fluide unique stratifié en deux couches. Les calculs menés dans cette section sont formels et seront utiles plus tard à l'étude du problème de l'interface air-mer.

On se place dans les conditions abstraites de la section précédente avec $n = 3$. Soit un fluide turbulent stratifié coulant dans un domaine partagé en une couche C_1 et une couche C_2. La densité ρ du fluide est constante dans chaque région. On note

— ρ^i la densité du fluide dans la couche C_i,
— ν_t la viscosité turbulente du fluide, égale à ν_t^i dans la couche C_i,
— w_j^i la $j^{\text{ième}}$ composante de la vitesse dans la couche C_i.

On impose enfin $w_3^1 = w_3^2 = 0$ à l'interface (interface rigide).

LEMME 1.4.1 — *On suppose que pour tout $(i,j) \in \{1,2\} \times \{1,2,3\}$, w_j^i est de classe C^1 en temps et en espace. Alors, on a à l'interface*

$$\rho^1 \nu_t^1 \; \partial_{\xi_3} w_1^1 = \rho^2 \nu_t^2 \; \partial_{\xi_3} w_1^2, \quad \rho^1 \nu_t^1 \; \partial_{\xi_3} w_2^1 = \rho^2 \nu_t^2 \; \partial_{\xi_3} w_2^2. \tag{1.4.8}$$ ♢

DÉMONSTRATION — Soit un cylindre V d'épaisseur ℓ, appuyé sur deux surfaces S^+ et S^- symétriques l'une de l'autre par rapport à l'interface entre les deux régions (*cf.* figure 1.2). En utilisant l'équation de conservation de la masse, l'équation de Navier-Stokes peut s'écrire pour ce fluide (en omettant l'indice m pour les quantités moyennées),

$$\partial_t(\rho \vec{W}) = div\,(\rho\,\nu_t\,\nabla_c \vec{W} - \rho\,\vec{W}\vec{W} - P\,Id) + \vec{F},$$

où Id désigne la matrice de l'identité. On intègre l'équation de Navier-Stokes sur le volume V en se servant de la formule d'intégration par parties, ce qui conduit à

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\,\vec{W}) = -\int_{\partial V} (\rho\,\nu_t\,\nabla_c \vec{W} - \rho\,\vec{W}\vec{W} - P\,Id)\,.\,\vec{n} + \int_V \vec{F}\;. \tag{1.4.9}$$

Puisque sur le compact $[0, \mathcal{T}] \times V$ les variables sont bornées car de classe C^1, on a

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\,\vec{W}) = O(\ell), \quad \int_V \vec{F} = O(\ell),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\partial V} (\rho\,\nu_t\,\nabla_c \vec{W} - \rho\,\vec{W}\vec{W} - P\delta_{(i,j)})\,.\,\vec{n} = \int_{S^+} (\rho\,\nu_t\,\nabla_c \vec{W} - \rho\,\vec{W}\vec{W})\,.\,\vec{n}^{\,+} - \\ \displaystyle\int_{S^+} P\,Id\,.\,\vec{n}^{\,+} + \int_{S^-} (\rho\,\nu_t\,\nabla_c \vec{W} - \rho\,\vec{W}\vec{W} - P\,Id)\,.\,\vec{n}^{\,-} + O(\ell). \end{array} \right.$$

On fait tendre ℓ vers 0 dans l'égalité (1.4.9). On note respectivement $\vec{W}^{\,i}$ et P^i la vitesse et la pression du fluide dans la couche C^i et S la surface limite commune à S^+ et S^-. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_S (\rho^1 \nu_t^1\,\nabla_c \vec{W}^{\,1} - \rho\,\vec{W}^{\,1}\vec{W}^{\,1} - P^1\,Id)\,.\,\vec{n} = \\ \displaystyle\int_S (\rho^2 \nu_t^2\,\nabla_c \vec{W}^{\,2} - \rho\,\vec{W}^{\,2}\vec{W}^{\,2} - P^2\,Id)\,.\,\vec{n}, \end{array} \right.$$

où $\vec{n}$ est la normale allant de la région 2 vers la région 1. Cette égalité ayant lieu pour tout S inclus dans l'interface, elle a lieu aussi pour les intégrants. On en déduit l'égalité matricielle satisfaite à l'interface et écrite composante par composante pour tous indices (k, j) :

$$\rho^1\nu^1\partial_{\xi_k}w_j^1 - \rho^1 w_k^1 w_j^1 - P^1\delta_k^j = \rho^2\nu^2\partial_{\xi_k}w_j^2 - \rho^2 w_k^2 w_j^2 - P^2\delta_k^j.$$

Comme $w_3^i = 0$ à l'interface, on obtient $(1.4.8)$ à partir de cette dernière égalité en prenant pour indices $k = 3$ et $j = 1$ puis $j = 2$. ♢

1.4.4 — COUCHE DE MÉLANGE DE SURFACE

On applique à l'océan et l'atmosphère les raisonnements des deux sections précédentes. On note

$$\vec{U}^a = \vec{v}^a + w^a\vec{k}$$

la vitesse de l'atmosphère et ρ^a sa densité. On considère dans tout ce livre que l'océan est forcé par l'atmosphère et on ne cherche pas à considérer un modèle couplé. On suppose que la vitesse de l'air est définie dans un voisinage supérieur de Γ_s, est de classe C^1 et est fixée une bonne fois pour toutes.

On suppose l'air et l'eau non miscibles. Ainsi, on devrait poser à l'interface entre l'eau et l'air,

$$\vec{v} = \vec{v}^a, \quad w = w^a = 0. \tag{1.4.10}$$

Les calculateurs dont on dispose aujourd'hui n'ont pas assez de puissance pour faire une simulation qui utiliserait $(1.4.10)$ en raison de la zone turbulente importante au voisinage de l'interface qu'il faut modéliser à l'aide de l'hypothèse de Reynolds. La figure 1.3 donne une idée de la structure de la couche de mélange et de ses ordres de grandeur.

On remplace la couche limite turbulente par une ligne fictive Γ_s qui est *le toit de l'océan*. C'est ici que l'hypothèse du toit rigide prend son sens. On calcule les conditions aux limites pour des quantités moyennes dans lesquelles on tente d'intégrer toute l'information sur la couche turbulente de surface.

1.4.5 — TENSION DU VENT ET CONDITION DE FLUX

On distingue plusieurs phénomènes à la proximité de la surface de la mer. Par exemple, les vagues produisent de l'énergie cinétique en se brisant, générant de la turbulence dans une couche d'épaisseur qui est de l'ordre de leur hauteur. Cette énergie est restituée à la colonne d'eau par un processus de diffusion turbulente verticale. Ce mécanisme est pris en compte par l'introduction de la viscosité turbulente.
Un autre phénomène est du à la tension du vent, notée $\vec{\mathrm{v}}$ dans tout le livre, qui est une des principales composante du forçage atmosphérique. Elle est définie par la formule

$$\vec{\mathrm{v}} \stackrel{def}{=} |\vec{v}^a|\,\vec{v}^a . \tag{1.4.11}$$

On montre *d'une manière formelle* dans cette section comment obtenir la condition aux limites $(1.4.12)$ sur Γ_s, moyennant des hypothèses sur la longueur de mélange ℓ à l'interface air-mer (hypothèses (H.1.1) et (H.1.2) dans ce qui suit) et la viscosité turbulente (hypothèse (H.1.3)),

$$\nu_t\,\partial_z \vec{v} = C_f\,\vec{\mathrm{v}} \tag{1.4.12}$$

où le coefficient de rugosité C_f est une constante sans dimension qui vaut expérimentalement $C_f \approx 0,63.\,10^{-6}$ (*cf.* DELEERSNIJDER ÃĐ[1]).

Preuve de $(1.4.12)$ — On écrit la condition de flux $(1.4.8)$ (*cf.* lemme 1.4.1) sous la forme

$$\rho\,\nu_t\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \rho^a\,\nu_t^a\,\frac{\partial \vec{v}^{\,a}}{\partial z}, \tag{1.4.13}$$

en notant ν_t^a la viscosité turbulente de l'air. Dans la couche turbulente, ρ et ρ^a sont supposés constants. On pose

$$\vec{T} = \rho^a\,\nu_t^a\,\frac{\partial \vec{v}^{\,a}}{\partial z}.$$

La longueur de mélange verticale est notée ℓ. Elle mesure la taille des tourbillons verticaux (*cf.* aussi la section 3.1.1, chapitre 3).
Plaçons-nous au dessus de la mer. Plus on se rapproche de sa surface, plus les tourbillons visibles sont petits. Si l'on se trouve à une altitude z, leur taille est de l'ordre de z qui est l'ordre de grandeur retenu pour la longueur de mélange. On suppose que

(H.1.1) $\ell = O(z)$,
(H.1.2) la viscosité turbulente est proportionnelle à ℓ.

Une analyse dimensionnelle montre que les hypothèses (H.1.2) et (H.1.3) conduisent à une seule formule possible pour déterminer ν_t^a qui est

$$\nu_t^a = C\,u^\star z, \tag{1.4.14}$$

où C est une constante sans dimensions et $u^\star$ une quantité positive ayant la dimension d'une vitesse. Soit l'hypothèse :

(H.1.3) on suppose que $u^\star$ ne dépend que du flux $\vec{T}$ et de ρ^a.

Une analyse dimensionnelle combinée à (H.1.3) montre que $u^\star$ est déterminée par

$$u^\star = \sqrt{\frac{|\,\vec{T}\,|}{\rho^a}}. \tag{1.4.15}$$

On note $\overrightarrow{C}^a$ la force extérieure appliquée au système atmosphérique et on fait le changement de variable $z' = z/\ell$ dans l'équation satisfaite par $\overrightarrow{v}^a$. Il vient

$$\begin{cases} \partial_t(\rho^a \overrightarrow{v}^a) + (\rho^a \overrightarrow{v}^a \nabla)(\rho^a \overrightarrow{v}^a) + \dfrac{\rho^a w^a}{\ell} \partial_{z'}(\rho^a \overrightarrow{v}^a) + \\ div(\rho^a \nu_t^a \nabla \overrightarrow{v}^a) + \dfrac{1}{\ell^2} \partial_{z'}(\rho^a \nu_t^a \partial_{z'} \overrightarrow{v}^a) + \nabla p^a = \rho^a \overrightarrow{C}^a . \end{cases}$$

En faisant tendre ℓ vers zéro dans cette équation (hypothèse des petites échelles), on obtient

$$\partial_{z'}(\rho^a \nu_t^a \partial_{z'} \overrightarrow{v}^a) = 0. \tag{1.4.16}$$

On omet les primes dans ce qui suit. On déduit de $(1.4.16)$ que $\overrightarrow{T}$ ne dépend pas de z et par conséquent $u^\star$ définie par $(1.4.15)$ non plus. On écrit alors en utilisant $(1.4.14)$,

$$\partial_z \overrightarrow{v}^a = \frac{\overrightarrow{T}}{C \rho^a u^\star z},$$

formule intégrée entre z et z_0 en notant z_0 une altitude de référence :

$$\overrightarrow{v}^a - \overrightarrow{v}^a|_{z=z_0} = \frac{\overrightarrow{T}}{C \rho^a u^\star} Log(\frac{z}{z_0}).$$

Cette égalité combinée à $(1.4.15)$ conduit à

$$\overrightarrow{T} = \frac{C^2}{\left[Log(\frac{z}{z_0})\right]^2} \rho^a \,|\overrightarrow{v}^a - \overrightarrow{v}^a|_{z=z_0}|(\overrightarrow{v}^a - \overrightarrow{v}^a|_{z=z_0}), \tag{1.4.17}$$

valable pour $z > z_0$. On pose

$$C_f = C_f(z, z_0) \overset{def}{=} \frac{\rho^a C^2}{\rho \left[Log(\frac{z}{z_0})\right]^2}. \tag{1.4.18}$$

On suppose que l'altitude de référence z_0 est fonction de l'état de la mer. Dans la pratique, on choisit de calculer C_f avec

$$z - z_0 \approx 10\, m \tag{1.4.19}$$

et on fait l'approximation

$$\overrightarrow{v}^a - \overrightarrow{v}^a|_{z=z_0} \approx \overrightarrow{v}^a, \tag{1.4.20}$$

justifiée par le fait que la vitesse de l'air très proche de la mer est négligeable devant la vitesse de l'air à une altitude d'environ $10\,m$. On suppose enfin que l'état de la mer ne dépend que de $\vec{v}^{\,a}$. Donc

$$z_0 = z_0(|\vec{v}^{\,a}|),$$

de sorte que des hypothèses d'analycité combinées à $(1.4.18)$ et $(1.4.19)$ conduisent à développer C_f sous la forme

$$C_f = C_0 \,+\, C_1\,|\vec{v}^{\,a}| \,+\, C_2\,|\vec{v}^{\,a}|^2 + ...$$

On peut prendre C_f constant en première approximation. La formule $(1.4.12)$ se déduit de $(1.4.17)$ combiné à $(1.4.13)$, $(1.4.18)$ et $(1.4.20)$. $\diamondsuit$

REMARQUE 1.4.1 — Il faut insister sur le fait que ce qui précède ne démontre pas rigoureusement $(1.4.12)$. Cependant, toute tentative de justification de cette condition aux limites, pourtant largement admise, fait appel à des hypothèses invérifiables à notre connaissance. On peut aussi voir ACHDOU-PIRONNEAU [1] (1995), où l'on obtient $(1.4.12)$ à l'aide de lois de parois. $\diamondsuit$

En résumé, en notant toujours

$$\vec{U} = \vec{v} + w\,\vec{k},$$

les conditions aux limites pour la vitesse sont

$$\begin{cases} (a) \quad w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \nu\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s} = C_f\,\vec{\mathrm{v}}, \\ (b) \quad \vec{U}\,|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0. \end{cases}$$

Ce sont les conditions avec lesquelles on travaille, que les grandeurs soient des grandeurs moyennes ou non.

1. 5 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA TEMPÉRATURE ET LA SALINITÉ

1.5.1 — POSITION DU PROBLÈME

On considère le problème thermodynamique de la détermination des conditions aux limites portant sur S et T. La grande analogie formelle entre ces deux variables fait que l'on concentre notre attention essentiellement sur T, les raisonnements menés étant presque les mêmes pour S en plus simples. Comme dans le paragraphe précédent, on considère surtout le bilan de surface qui constitue le principal problème dans lequel on distingue :

- le chauffage par le soleil et l'émission radiative,
- les échanges de chaleur avec l'air (chaleur sensible),

• l'évaporation et les précipitations (chaleur latente).

1.5.2 — FLUX SOLAIRE INCIDENT ET ÉMISSION RADIATIVE

L'océan reçoit de l'énergie et en émet. À grande échelle, la seule source de chaleur de l'océan est le soleil. On note Q_s le flux d'énergie solaire incident par unité de surface supposé constant. Seule une partie de l'énergie incidente est captée, l'autre est réfléchie vers l'atmosphère qui trouve là sa principale source naturelle de chaleur. La quantité moyenne d'énergie solaire par unité de surface absorbée par l'océan est de l'ordre de $175\,W.m^2$.
Notons par ailleurs que le flux incident est tempéré par la couverture nuageuse qui capte environ 70 % de l'énergie. On déduit de ces considérations que la densité de flux effectivement capté par l'océan au point (x, y) de Γ_s est calculé par la formule

$$Q_I = Q_I(x, y) = Q_s\,(1 - a(x, y))\,(1 - 0,7\,n(x, y)), \tag{1.5.1}$$

en notant

— $n = n(x, y)$ est la fraction de ciel nuageux,
— $a = a(x, y)$ est l'albédo qui mesure la fraction d'énergie réfléchie et qui admet $0,3$ pour valeur moyenne sur la Terre.

On notera que a et n sont sans dimension. Tout sous ensemble $\mathcal{U}$ de Γ_s reçoit de la part du soleil la quantité d'énergie par unité de temps,

$$Q_I(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} Q_s\,(1 - a(x, y))\,(1 - 0,7\,n(x, y))\,dxdy.$$

• *Dans ce qui précède, $Q_I(\mathcal{U})$ est mesuré en $W = J.s^{-1}$. C'est une énergie par unité de temps, c'est-à-dire un flux. Celui-ci est reçu par le milieu étudié, mettant en évidence une notion d'orientation entre ce qui est reçu et ce qui est émis. Afin d'en tenir compte, on définit le flux vectoriel par*

$$\vec{Q}_I \stackrel{def}{=} -Q_I\,\vec{k}\,. \tag{1.5.2}$$ ◊

Si elle n'avait pas une couverture fluide, la Terre se comporterait comme un corps noir. Lorsqu'elle reçoit de l'énergie sous forme de chaleur, sa surface se réchauffe jusqu'à ce qu'elle atteigne son équilibre radiatif, moment à partir duquel elle restitue son trop plein d'énergie sous forme de radiations. À sa température d'équilibre T, elle restitue par unité de temps et de surface l'énergie donné par la loi de Stefan,

$$E = \sigma\,T^4,$$

avec $\sigma = 5,7.10^{-8}\,W.m^2.K^{-4}$. On admet que la surface de l'océan est toujours à la température qui garantit l'équilibre radiatif, ce qui constitue de son point de vue une perte d'énergie. Le flux vectoriel correspondant vaut

$$\vec{E} \stackrel{def}{=} E\,\vec{k} = \sigma\,T^4\,\vec{k}\,. \tag{1.5.3}$$

REMARQUE 1.5.1 — L'atmosphère peut réfléchir de nouveau vers l'océan une partie de l'énergie qu'elle a reçu de l'océan lui même par émission radiative. C'est l'effet de serre dont on ne tient pas compte ici. $\diamondsuit$

1.5.3 — ÉCHANGES DE CHALEUR AVEC L'ATMOSPHÈRE : CHALEUR SENSIBLE

On note T_a la température de l'air qui est proche de la surface de l'eau.

- *La chaleur sensible*. Lorsque sa température T en surface est difffente de T_a, l'océan cherche à l'équilibrer par rapport à celle de l'atmosphère (et réciproquement). L'énergie dépensée par unité de masse au cours de cette transformation est appelée *la chaleur sensible* et notée Q_s.

Le signe de Q_s dépend du signe de $T - T_a$ et nous supposons que

$$Q_s = Q_s \left(T - T_a ,\, \rho_a \, c_p^a ,\, \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{v}}|} \right)$$

en notant c_p^a la chaleur spécifique de l'air. Une analyse dimensionnelle conduit à

$$Q_s(T) = C_s \, \rho_a \, c_p^a \, \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{v}}|} \, (T - T_a) \tag{1.5.4}$$

où C_s est une constante sans dimension valant $0,83$ dans des conditions stables et $1,1$ dans des conditions instables. Avec la convention adoptée, ce processus est vu par l'océan comme une perte d'énergie, c'est-à-dire que si $T < T_a$ il gagne de l'énergie et si $T > T_a$ il en perd. On pose

$$\overrightarrow{Q}_s \, (T) \stackrel{def}{=} Q_s(T) \, \overrightarrow{k} \; . \tag{1.5.5}$$

1.5.4 — ÉVAPORATION ET PRÉCIPITATIONS : CHALEUR LATENTE

Il faut tenir compte de l'évaporation d'eau en surface et des précipitations.

- *La chaleur latente* est la quantité de chaleur nécessaire à l'évaporation d'une unité de masse d'eau donnée à la température T.

Compte tenu des ordres de grandeurs des échelles de température usuelles, on prend $\mathcal{L}_v(T)$ constant.

- *Le taux d'évaporation en surface* est la masse d'eau qui s'évapore par unité de temps et de surface. La quantité d'énergie nécessaire à cette transformation est égale à $Q_l(T) = e \, \mathcal{L}_v(T)$, mesurée en $W.m^2$.

Il faut estimer e qui est algébrique. Lorsque $e > 0$, l'océan perd de l'eau sous forme de vapeur, lorsque $e < 0$ il y a précipitation, il pleut et l'océan gagne de l'eau. C'est pourquoi on considère :

- q_s, la quantité de vapeur d'eau maximale que l'air peut contenir lorsque sa température est celle de la surface de l'océan,
- q_a, le taux d'humidité de l'air.

Le signe de e dépend de la différence $q_s - q_a$. D'après la loi de Clausius-Clapeyron, q_s est de la forme

$$q_s = e^{-\lambda T},$$

λ étant une constante expérimentale. On suppose q_a donnée. On suppose que e dépend aussi de la tension du vent et de la densité de l'air ρ^a,

$$e = e\left(\sqrt{|\vec{\mathrm{v}}|},\, q_s - q_a,\, \rho_a\right).$$

Une analyse dimensionnelle montre que

$$e = C_e\, \rho_a \sqrt{|\vec{\mathrm{v}}|}\,(q_s - q_a)$$

où la constante $C_e = 1,5.\,10^{-3}$ est une constante sans dimension. Par conséquent, $Q_l(T)$ est de la forme

$$Q_l(T) = \mathcal{L}_v(T)\, C_e\, \rho_a \sqrt{|\vec{\mathrm{v}}|}\,(e^{-\lambda T} - q_a). \tag{1.5.6}$$

Notons qu'avec la convention choisie, cette transformation est une perte d'énergie en surface pour l'océan et définit le flux vectoriel

$$\vec{Q}_l\,(T) \overset{def}{=} Q_l(T)\,\vec{k}\,. \tag{1.5.7}$$

Ceci achève le détail du bilan thermodynamique de surface dont on fait la synthèse dans la section suivante.

1.5.5 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA TEMPÉRATURE EN SURFACE

Les égalités (1.5.2), (1.5.3), (1.5.5) et (1.5.7) permettent de déterminer le flux de chaleur vectoriel total $\vec{Q}$ reçu par l'océan en surface :

$$\vec{Q} = \vec{Q}\,(T) = \vec{Q}_I + \vec{E} + \vec{Q}_s + \vec{Q}_l\,.$$

D'après ce qui précède,

$$\vec{Q} = -\,(Q_I - E - Q_s - Q_l)\,\vec{k}\,.$$

On pose

$$Q = (Q_I - E - Q_s - Q_l).$$

Notons que $\overrightarrow{Q}$ est un flux thermique pour l'atmosphère avec une convention de signe contraire.
Un raisonnement analogue à celui effectué dans la section 1.4.3 montrant la formule (1.4.8) (*cf.* lemme 1.4.1, section 1.4.3) permet d'écrire directement en égalant les valeurs algébriques des flux,

$$\rho\, c_p\, \mathcal{K}_T\, \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{G_s} = Q(T). \tag{1.5.8}$$

Les formules (1.5.1), (1.5.3), (1.5.4) et (1.5.6) conduisent au calcul de la valeur de $Q(T)$ dans laquelle ont contribué

— le chauffage par le soleil,
— le rayonnement radiatif,
— la chaleur sensible,
— la chaleur latente,

ce qui fournit pour $Q(T)$ la formule

$$\begin{cases} Q(T) = Q_s\,(1 - a(x,y))\,(1 - 0,7\, n(x,y)) - \sigma\, T^4 - \\ C_s\, \rho_a\, c_p^a \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{v}}|}\,(T - T_a) - \mathcal{L}_v(T)\, C_e\, \rho_a \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{v}}|}\,(e^{-\lambda T} - q_a). \end{cases}$$

En vue de la résolution du problème de mathématique, nous pouvons simplifier cette formule en la linéarisant sans changer la structure du problème. On note que pour les très grandes valeurs de T, $Q(T) = -\,O(T^4)$ est négatif et que T, comptée en Kelvin, est positive. Enfin on suppose $\rho\, c_p$ constant. On remplace (1.5.8) par

$$\rho c_p\, \mathcal{K}_T\, \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{G_s} = \alpha\,(T^\star - T), \tag{1.5.9}$$

avec $\alpha > 0$ et $T^\star$ constantes.

1.5.6 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA TEMPÉRATURE SUR LE FOND ET LES COTÉS

Afin d'avoir un système complet de conditions aux limites pour T, il faut encore écrire des conditions de flux au fond et sur les cotés.

Lorsque la température T_{Γ_f} de Γ_s est supérieure à celle de l'océan au même lieu, celui-ci a tendance à se réchauffer. Lorsque T_{Γ_f} est inférieure à celle de l'océan, ce dernier va se refroidir. Par conséquent, on peut considérer en première approximation que le flux de température est proportionnel à $T_{\Gamma_f} - T$ sur Γ_s. On fait le même raisonnement sur Γ_l et on en déduit les formules linéarisées

$$\rho\, c_p\, \mathcal{K}_T\, \frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\bigg|_{G_l} = \alpha_{\Gamma_l}\,(T_{\Gamma_l} - T), \quad \rho\, c_p\, \mathcal{K}_T\, \frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}}\bigg|_{G_f} = \alpha_{\Gamma_f}\,(T_{\Gamma_f} - T). \tag{1.5.10}$$

Pour simplifier la présentation, on suppose les températures de référence au fond et sur les bords constantes.

- *L'anologie entre* $(1.5.10)$ *et* $(1.5.9)$ *pour* ρc_p *constant fait que l'on utilise à partir de maintenant la même condition de flux sur* Γ_s, Γ_l *et sur* Γ_f. *Cette simplification n'affecte pas la nature qualitative du problème de mathématique.* $\diamondsuit$

1.5.7 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA SALINITÉ ET BILAN FINAL

Lorsqu'il y a évaporation en surface avec $e > 0$, la salinité augmente proportionnellement à la quantité eS. En revanche, dans le cas d'une précipitation avec $e < 0$, celle-ci diminue proportionnellement à eS. Par analogie avec ce qui précède, on pose sur Γ_s

$$\mathcal{K}_S \frac{\partial S}{\partial z} = C_s \, e \, S, \tag{1.5.11}$$

où C_s est une constante d'ajustement.

Au fond et sur les parois latérales il n'y a aucun échange de sel. On ne considère pas l'embouchure des fleuves et autres phénomènes dont le caractère est assez local pour qu'ils puissent être négligés. Le flux de salinité est donc nul sur $\Gamma_l \cup \Gamma_l$.

À de grandes échelles de temps, on peut considérer pour simplifier que l'évaporation compense les précipitations, ce qui permet de remplacer $(1.5.11)$ en une condition de Neumann homogène. Il en résulte que la condition pour S sur $\Gamma = \partial\Omega$ est

$$\mathcal{K}_S \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{1.5.12}$$

condition retenue par la suite.

Enfin, on note $\vec{v}_0$, T_0 et S_0 les données initiales pour la vitesse horizontale, la température et la salinité. Nous verrons en quoi il suffit de disposer d'une donnée initiale pour ces variables dans le chapitre suivant.

- *On a donné dans les paragraphes 2.4 et 2.5 le détail de l'obtention et des simplifications des conditions aux limites adaptées au système* $(EP1)$. *Elles sont résumées dans le système* $(CL1)$,

$$(CL1) \qquad \begin{cases} (a) \quad w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \nu \, \partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = C_f \,\vec{\mathrm{v}}, \\ (b) \quad \vec{U}\,|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (c) \quad \rho c_p \, \mathcal{K}_T \left.\dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = \alpha\,(T^\star - T), \quad \mathcal{K}_S \left.\dfrac{\partial S}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ (d) \quad \vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad S|_{t=0} = S_0, \end{cases}$$

système retenu dans la suite. ♢

Le système $(EP1)-(CL1)$ est le système physique simplifié de base qui sert à l'étude de la circulation océanique à grande échelle. Il reste encore quelques transformations à lui faire subir pour pouvoir en déduire un problème de mathématique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1. 6 — ADIMENSIONNALISATION ET RÉDUCTION DU SYSTÈME

1.6.1 — POSITION DU PROBLÈME

La synthèse des systèmes $(EP1)$ et $(CL1)$ conduit au système physique d'équations primitives pour l'océan

$$
(Ph1) \qquad \begin{cases}
(1) \quad \partial_t \vec{v} + (\vec{U}\,\nabla_c)\,\vec{v} - \nu\Delta_c\vec{v} + \dfrac{f}{\rho_0}\,\vec{k} \times \vec{v} + \dfrac{\nabla p}{\rho_0} = 0, \\
(2) \quad \partial_z p = -\rho\, g, \\
(3) \quad div_c\vec{U} = 0, \quad \vec{U} = \vec{v} + w\,\vec{k}, \\
(4) \quad \rho = \rho_0 + \rho_S(S - S_0) - \rho_T(T - T_0), \\
(5) \quad \partial_t T + (\vec{U}\,\nabla_c)T - \mathcal{K}_T\Delta_c T = 0, \\
(6) \quad \partial_t S + (\vec{U}\,\nabla_c)S - \mathcal{K}_S\Delta_c S = 0, \\
(7) \quad w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \nu\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s} = C_f\,\vec{\mathrm{v}}, \\
(8) \quad \vec{U}\,|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\
(9) \quad \mathcal{K}_T\, \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \alpha\,(T^\star - T), \quad \mathcal{K}_S\, \dfrac{\partial S}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\
(10) \quad \vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad S|_{t=0} = S_0,
\end{cases}
$$

dans lequel on a remplacé α par $\alpha/\rho c_p$ supposé constant et ce, sans changer de notation. L'objectif de ce paragraphe est la transformation de $(Ph1)$ en un problème de mathématiques. Pour cela, on

- adimensionnalise le système $(Ph1)$,
- réduit le système $(Ph1)$.

— L'adimensionnalisation du système consiste à faire des changements d'échelles en temps et en espace qui permettent de considérer des variables sans dimension à la place des variables physiques. Cela a l'avantage de faire apparaitre certaines lois d'échelles dans les équations, en mettant en évidence les nombres Ro et δ (*cf.* $(EP2)$, $(EP3)$ et $(1.6.1)$).

— La réduction du système consiste à éliminer les équations superflues, pour ne garder que le système minimal à l'aide duquel on peut déduire le calcul de l'ensemble de toutes les variables. On simplifie également quelques coefficients. Ces transformations n'affectent pas la structure mathématique du modèle mais permettent une présentation ultérieure plus claire des difficultés et des résultats.

Le système finalement obtenu (*cf.* le système $(M1)$) est le système analysé dans le chapitre suivant.

1.6.2 — CHANGEMENTS D'ÉCHELLES ET OPÉRATIONS FORMELLES

On définit dans cette section les variables sans dimension puis on dresse la liste des formules déduites des changements d'échelles.

• *Changements d'échelles*.Ê On rappelle que τ désigne un temps caractéristique, L_v et L_h des longueurs caractéristiques verticales et horizontales (*cf.* section 1.1.2). Le nombre de Rossby et le quotient d'aspect δ sont définis par les formules $(1.1.3)$ et $(1.1.4)$ respectivement. On pose

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad x' = \frac{x}{L_h}, \quad y' = \frac{y}{L_h}, \quad z' = \frac{z}{L_v}.$$

Ces nouvelles variables sont sans dimension et de l'ordre de 1. On note $M' = (x', y', z')$. On dresse maintenant le formulaire des variables et coefficients sans dimension associés au système $(Ph1)$ et des opérateurs correspondants.

• *Variables sans dimension.* On pose

$$\vec{v}'(t', M') \stackrel{def}{=} \frac{\tau}{L_h} \vec{v}(t, M), \quad w'(t', M') \stackrel{def}{=} \frac{\tau}{L_v} w(t, M).$$

Le vecteur $\vec{U}' = \vec{v}' + w' \vec{k}$ est le vecteur vitesse adimensionnalisé, dont l'ordre de grandeur vaut 1. On note ensuite

$$\begin{cases} p'(t', M') \stackrel{def}{=} \dfrac{Ro\,\tau^2}{L_h^2\,\rho_0}\, p(t, M), & \rho'(t', M') \stackrel{def}{=} \dfrac{\rho(t, M)}{\rho_0}, \\ T'(t', M') \stackrel{def}{=} \dfrac{T(t, M)}{T^0}, & S'(t', M') \stackrel{def}{=} \dfrac{S(t, M)}{S^0}, \end{cases}$$

où ρ_0, T^0, S^0 sont les valeurs de référence pour la densité, la température et la salinité.

• *Opérateurs.* On fait la liste des opérateurs primés,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{L_h}{\tau^2} \frac{D\vec{v}'}{Dt'}, \quad \frac{Dw}{Dt} = \frac{L_v}{\tau^2} \frac{Dw'}{Dt'}, \quad div_c \vec{U} = \frac{1}{\tau}\, div_c' \vec{U}' .$$

On a aussi,

$$\begin{cases} \Delta \vec{v} = \dfrac{1}{\tau\, L_h}\, \Delta' \vec{v}', & \partial^2_{zz} \vec{v} = \dfrac{L_h}{\tau\, L_v^2}\, \partial^2_{z'z'} \vec{v}', \\ \Delta w = \dfrac{L_v}{\tau\, L_h^2}\, \Delta' w', & \partial^2_{zz} w = \dfrac{1}{\tau\, L_v}\, \partial^2_{z'z'} w'. \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{cases} \dfrac{Dp}{Dt} = \dfrac{L_h^2\,\rho_0}{\tau^3\,Ro}\,\dfrac{Dp'}{Dt'}, & \dfrac{DT}{Dt} = \dfrac{T^0}{\tau}\,\dfrac{DT'}{Dt'}, & \dfrac{DS}{Dt} = \dfrac{S^0}{\tau}\,\dfrac{DS'}{Dt'}, \\ \nabla p = \dfrac{L_h\,\rho_0}{\tau^2\,Ro}\,\nabla' p', & \Delta T = \dfrac{T^0}{L_h^2}\,\Delta' T', & \Delta S = \dfrac{S^0}{L_h^2}\,\Delta' S', \\ \partial_z p = \dfrac{L_h\,\rho_0}{\delta\,\tau^2\,Ro}\,\partial_{z'} p', & \partial^2_{zz} T = \dfrac{T^0}{L_v^2}\,\partial^2_{z'z'} T', & \partial^2_{zz} S = \dfrac{S^0}{L_v^2}\,\partial^2_{z'z'} S'. \end{cases}$$

• *Coefficients adimensionnalisés*. On poursuit l'énumération des opérations de mise aux dimensions des paramètres introduits au fur et à mesure de la mise en place des équations en posant

$$g' \stackrel{def}{=} \frac{\delta\,\tau^2\,Ro}{L_h}\,g, \quad \delta = \frac{L_v}{L_h}, \quad c_p' \stackrel{def}{=} \frac{\tau^2\,T^0}{L_h^2}\,c_p.$$

Les viscosités sont adimensionnalisées comme suit,

$$\begin{cases} \nu_h \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_h^2}\,\nu, & \nu_v \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_v^2}\,\nu, & \mathcal{K}_{T,h} \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_h^2}\,\mathcal{K}_T, \\ \mathcal{K}_{T,v} \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_v^2}\,\mathcal{K}_T & \mathcal{K}_{S,h} \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_h^2}\,\mathcal{K}_S, & \mathcal{K}_{S,v} \stackrel{def}{=} \dfrac{\tau}{L_v^2}\,\mathcal{K}_S. \end{cases}$$

Enfin la vitesse angulaire ω est prise égale à $1/2$ de sorte que $Ro = 1/\tau$.

1.6.3 — LES ÉQUATIONS PRIMITIVES ADIMENSIONNALISÉES

On se sert des listes établies dans la section précédente. En n'écrivant plus les primes dans les équations et choisissant $g = 1$, le système $(EP1)$ des équations primitives devient pour les variables sans dimension

$$(EP2) \qquad \begin{cases} (a) & \dfrac{D\vec{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \dfrac{1}{Ro}\left(f\,\vec{k} \times \vec{v} + \nabla p\right) = 0, \\ (b) & \partial_z p = -\,\rho, \\ (c) & div \vec{v} + \partial_z w = 0, \\ (d) & \dfrac{DT}{Dt} - \mathcal{K}_{T,h} \Delta T - \mathcal{K}_{T,v} \partial^2_{zz} T = 0, \\ (e) & \dfrac{DS}{Dt} - \mathcal{K}_{S,h} \Delta S - \mathcal{K}_{S,v} \partial^2_{zz} S = 0, \\ (f) & \rho = 1 - \alpha_T\,(T-1) + \alpha_S\,(S-1). \end{cases}$$

Ce système met en évidence l'anisotropie des phénomènes marins aux grandes échelles par l'introduction de viscosités verticales et horizontales distinctes ainsi que des coefficients de diffusion verticaux et horizontaux distincts.

REMARQUE 1.6.1 — Si l'on ne fait pas directement l'approximation de l'équation hydrostatique, la troisième composante de l'équation $(1.2.6)$ satisfaite par la composante verticale de la vitesse w, s'écrit sous forme adimensionnalisée (sans écrire les primes)

$$\frac{Dw}{Dt} - \nu_h \Delta w - \nu_v \partial^2_{zz}(w) - \frac{1}{\delta\, Ro}\, u\, h + \frac{1}{\delta^2\, Ro}\left(\frac{\partial_z p}{\rho} + g\right) = 0. \tag{1.6.1}$$

L'équation hydrostatique se déduit formellement de $(1.6.1)$ en faisant tendre δ vers 0. Il semble qu'il y ait ici la source d'un problème ouvert intéressant, qui consisterait à justifier l'équation hydrostatique rigoureusement à partir de $(1.6.1)$. $\diamondsuit$

1.6.4 — ADIMENSIONNALISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

On doit maintenant adimensionnaliser les conditions aux limites. L'adimensionnalisation des conditions de type Dirichlet est immédiate ainsi que celle des conditions initiales. Les conditions de flux posent en revanche un problème plus délicat.

Dans la suite, on note pour $X = (x, y)$,

$$X' = \frac{X}{L_h}, \quad z' = \frac{z}{L_v}$$

et Ω' l'ouvert déduit de Ω par la transformation $(X, z) \to (X', z')$. L'ouvert Ω est de classe C^1 par morceau, donc il en est de même pour l'ouvert Ω'. Partout où elle est définie, on décompose la normale à Ω en posant

$$\vec{n} = \vec{n}_X + n_z \vec{k}.$$

De même, on note $\vec{n}'$ la normale à Ω', que l'on décompose de la même manière,

$$\vec{n}' = \vec{n}_{X'} + n_{z'} \vec{k}.$$

Étant donnée une application f de classe C^1, on pose

$$f'(X', z') = f(X, z).$$

Il se pose le problème de calculer

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$$

dans les nouvelles variables.

LEMME 1.6.1 — *On suppose que $\partial\Omega = \Gamma$ est régulière et de classe C^1 par morceaux. Alors, il existe une fonction $a = a(N')$ positive et continue par morceaux telle que l'on ait en presque tout point de $\Gamma' = \partial\Omega'$,*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = a\left(\frac{1}{L_h^2}\nabla' f'.\vec{n}_{X'} + \frac{1}{L_v^2}\partial_{z'} f'.\, n_{z'}\right). \tag{1.6.2}$$

De plus, la fonction a ne dépend que de la géométrie de Ω. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — L'hypothèse " $\partial\Omega = \Gamma$ est régulière par morceaux" permet de définir une normale. Il sagit surtout d'une hypothèse de régularité sur Γ_f et donc sur H supposée satisfaite jusqu'à la fin du livre.

Soit $N = (X_0, z_0) \in \Gamma$ un point régulier. Alors, en ce point, Γ est localement définie par une équation implicite

$$F(X, z) = 0,$$

avec F de classe C^1. La normale en N est telle que

$$\vec{n}_X = \frac{1}{\lambda}\nabla F, \quad n_z = \frac{1}{\lambda}\partial_z F, \quad \lambda \stackrel{def}{=} \sqrt{|\nabla F|^2 + |\partial_z F|^2},$$

quantité calculée en N. De même, au point N' correspondant sur Γ',

$$F'(X', z') = 0,$$

et $F(X, z) = F'(X', z')$. On a

$$\vec{n}_{X'} = \frac{1}{\lambda'}\nabla F', \quad n_z = \frac{1}{\lambda'}\partial_{z'} F', \quad \lambda' \stackrel{def}{=} \sqrt{|\nabla' F'|^2 + |\partial_{z'} F'|^2}.$$

Comme N est un point régulier, $\lambda \neq 0$ et $\lambda' \neq 0$. Soit f de classe C^1 sur Ω. On pose $f'(X', z') = f(X, z)$. On a les relations

$$\nabla f = \frac{1}{L_h^2}\nabla' f', \quad \partial_z f = \frac{1}{L_v^2}\partial_{z'} f'.$$

Les mêmes relations ont lieu aussi pour F. Par conséquent, la relation (1.6.2) se déduit des relations précédentes et du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \,.\, \vec{n}_X + \partial_z f \,.\, n_z,$$

avec $a = \lambda'/\lambda$. $\diamondsuit$

On applique ce résultat à la température et la salinité en se servant des définitions de la section 1.6.2 et du système de conditions aux limites $(CL1)$. On obtient

$$\begin{cases} \left.\left(\mathcal{K}_{S,h}\dfrac{\partial S'}{\partial \vec{n}_{X'}} + \mathcal{K}_{S,v}\dfrac{\partial S'}{\partial n_{z'}}\right)\right|_{\Gamma'} = 0, \\ \left.\left(\mathcal{K}_{T,h}\dfrac{\partial T'}{\partial \vec{n}_{X'}} + \mathcal{K}_{T,v}\dfrac{\partial T'}{\partial n_{z'}}\right)\right|_{\Gamma'} = \dfrac{\alpha\tau}{a}\left(\dfrac{T^\star}{T^0} - T'\right). \end{cases}$$

Il reste la condition aux limites pour la vitesse horizontale. Pour cela, il faut aussi adimensionnaliser la tension du vent. On choisit pour échelle de longueur horizontale de l'atmosphère L_v et on note $\overline{\tau}$ son échelle de temps. On déduit de $(1.4.12)$ et de ce qui précède que la vitesse sans dimension vérifie

$$\nu_v \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial z} = C_f \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{\overline{\tau}}\right)^2 \overrightarrow{\mathrm{v}}' .$$

En résumé, le système de conditions aux limites pour les variables sans dimensions sans écrire les primes, est

$$(CL2) \qquad \begin{cases} (a) & w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \nu_v \, \partial_z \overrightarrow{v} \, |_{\Gamma_s} = C_f \dfrac{1}{\delta} \left(\dfrac{\tau}{\overline{\tau}}\right)^2 \overrightarrow{\mathrm{v}}, \\ (b) & \overrightarrow{U} \, |_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (c) & \left.\left(\mathcal{K}_{T,h} \dfrac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \dfrac{\partial T}{\partial n_z}\right)\right|_{\Gamma} = \dfrac{\alpha \tau}{a} \left(\dfrac{T^\star}{T^0} - T\right), \\ (d) & \left.\left(\mathcal{K}_{S,h} \dfrac{\partial S'}{\partial \overrightarrow{n}_{X'}} + \mathcal{K}_{S,v} \dfrac{\partial S'}{\partial n_{z'}}\right)\right|_{\Gamma} = 0, \\ (e) & \overrightarrow{v} \, |_{t=0} = \overrightarrow{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad S|_{t=0} = S_0, \end{cases}$$

ce qui conclut la question des conditions aux limites.

1.6.5 — RÉDUCTION DU SYSTÈME

Ce chapitre se termine par une dernière simplification du système des équations primitives et de ses conditions aux limites. Les opérations faites dans cette section sont :

> (i) regroupement des variables jouant le même rôle, S et T, puis normalisation des constantes,
> (ii) élimination des variables p, ρ et w dans le système à l'aide de l'équation hydrostatique et de l'équation d'état, introduction de la pression superficielle p_s et de la contrainte délocalisée.

(i) On remarque que les variables S et T sont de même nature dans le système $(EP2)$, $(CL2)$. On pourrait les regrouper en une unique variable vectorielle. On peut aussi n'en considérer qu'une seule pour simplifier la présentation et sans changer le problème de mathématique qui s'en déduit. Le système considéré est alors

$$(EP3) \qquad \begin{cases} (a) & \dfrac{D\overrightarrow{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \overrightarrow{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \overrightarrow{v} + \dfrac{1}{Ro} \left(f \, \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v} + \nabla p\right) = 0, \\ (b) & \partial_z p = -\rho, \\ (c) & div \overrightarrow{v} + \partial_z w = 0, \\ (d) & \dfrac{DT}{Dt} - \mathcal{K}_{T,h} \Delta T - \mathcal{K}_{T,v} \partial^2_{zz} T = 0, \\ (e) & \rho = 1 - \alpha_T (T - 1). \end{cases}$$

Toujours sans changer la structure du problème mais pour simplifier l'écriture, on suppose que

$$T^0 = 1, \quad \frac{\tau}{a} = 1, \quad C_f \frac{1}{\delta} \left(\frac{\tau}{\overline{\tau}}\right)^2 = 1,$$

de sorte que le système $(CL2)$ s'écrit sous la forme plus simple

$$(CL3) \qquad \begin{cases} (a) & w|_{\Gamma_s} = 0, \quad \nu_v \, \partial_z \vec{v} \, |_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \\ (b) & \vec{U} \, |_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (c) & \left(\mathcal{K}_{T,h} \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \dfrac{\partial T}{\partial n_z} \right) \Big|_{\Gamma} = \alpha \, (T^\star - T), \\ (d) & \vec{v} \, |_{t=0} = \vec{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0 \end{cases}$$

La structure mathématique du système $(EP3)$-$(CL3)$ est la même que celle de $(EP2)$-$(CL2)$. On pourrait rajouter au système $(EP3)$ autant d'équations d'advection-diffusion que l'on veut avec des conditions de flux du même ordre que $(CL3, c)$. Les raisonnements d'analyse effectués dans les chapitres suivants n'en seraient pas affectés mais leur présentation serait plus lourde. Il est bien entendu que de telles simplifications ne sont pas raisonnables lors d'une simulation numérique de la circulation océanique, qui pourrait malgré tout être testée dans un premier temps avec $(EP3)$-$(CL3)$ afin de mettre au point et tester des codes numériques dans un contexte simplifié, avant de faire des calculs à partir du système physique $(Ph1)$.

(ii) *Élimination de* p *et* ρ. On suppose les variables de classe C^2 en temps et en espace. On intègre l'équation hydrostatique $(EP3, b)$ suivant la verticale en notant

— $p_s = p_s(t, x, y)$ *la pression superficielle sur* Γ_s,

$$(1.6.3) \qquad p(t, x, y, z) = p_s(t, x, y) + \int_z^0 \rho(t, x, y, z') \, dz',$$

- *la pression superficielle* p_s *n'est pas la pression atmosphérique car on fait l'hypothèse du toit rigide.*

Dans toute la suite de ce livre, on pose

$$(1.6.4) \qquad \forall \, f \in C(\Omega, \mathbb{R}), \quad M(f) = M(f)(x, y, z) \stackrel{def}{=} \int_z^0 f(x, y, z') \, dz'.$$

En reportant $(1.6.3)$ combinée à l'équation d'état $(EP3, e)$ dans l'équation $(EP3, a)$ satisfaite par $\vec{v}$, on obtient

$$(1.6.5) \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \frac{1}{Ro} \left(f \, \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s - \alpha_T M(\nabla T) \right) = 0.$$

• *Élimination de w.* On intègre l'equation de Boussinesq $(EP3, c)$ suivant la verticale en utilisant la condition aux limites $(CL3, a)$ (hypothèse du toit rigide),

$$w = M(div\vec{v}) \stackrel{def}{=} W(\vec{v}) \tag{1.6.6}$$

et on reporte (1.6.6) dans (1.6.5) ainsi que dans l'équation pour la température $(EP3, d)$. On en déduit, en prenant $\alpha_T = 1$,

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(f\,\vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s - M(\nabla T)\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_t T + (\vec{v}\,\nabla)\,T + W(\vec{v})\,\partial_z T - \mathcal{K}_{T,h}\Delta T - \mathcal{K}_{T,v}\partial^2_{zz} T = 0. \end{cases} \tag{1.6.7}$$

• *Contrainte délocalisée.* Le système (1.6.7) comprend deux équations alors que les inconnues sont $\vec{v}$,T et p_s. Il faut une équation supplémentaire. Dans la suite $\mathcal{T} > 0$ est un temps fixé et on pose

$$\forall\, f \in C^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega), \quad \tilde{M}(f)(t, x, y) \stackrel{def}{=} M(f)(t, x, y, -H(x, y)). \tag{1.6.8}$$

L'équation supplémentaire se déduit de l'énoncé général :

LEMME 1.6.2 — *Soit $\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2$ un champ de vecteurs horizontal tel que*

$$\vec{v}\,|_{\Gamma_f} = 0, \quad W(\vec{v})|_{\Gamma_f} = 0. \tag{1.6.9}$$

Alors, on a l'égalité

$$div\left(\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\,(t, x, y, z)\,dz'\right) = div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0. \tag{1.6.10}$$ $\diamondsuit$

Les conditions aux limites $(CL3, a, b)$ combinées à l'approximation de Boussinesq $(EP3, c)$ montrent que le champ des vitesses horizontales du fluide satisfait la condition (1.6.9). Par conséquent, l'équation (1.6.10) est l'équation complémentaire de notre système. Elle est déduite des conditions aux limites et de l'approximation de Boussinesq.

DÉMONSTRATION — Soit

$$\vec{V} \stackrel{def}{=} M(\vec{v}) = U\,\vec{e}_1 + V\,\vec{e}_2 = M(u)\,\vec{e}_1 + M(v)\,\vec{e}_2\,.$$

On a

$$\begin{cases} div\,\vec{V}(t, x, y, -H(x, y)) = \partial_x U(t, x, y, -H(x, y)) + \\ \partial_y V(t, x, y, -H(x, y)) + \vec{v}(t, x, y, -H(x, y))\,.\nabla H(x, y), \end{cases} \tag{1.6.11}$$

car $\partial_z \overrightarrow{V} = - \overrightarrow{v}$. Par ailleurs, la formule $(1.6.6)$ entraîne que

$$(1.6.12) \qquad \begin{cases} \partial_x U(t,x,y,-H(x,y)) + \partial_y V(t,x,y,-H(x,y)) = \\ \displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0} div\overrightarrow{v}(t,x,y,z')\,dz' = W(\overrightarrow{v})|_{\Gamma_s} - W(\overrightarrow{v})|_{\Gamma_f}. \end{cases}$$

Comme $W(\overrightarrow{v})|_{\Gamma_s}$ est nul, l'égalité $(1.6.10)$ résulte de $(1.6.11)$ et $(1.6.12)$ combiné à la condition $(1.6.9)$, $W(\overrightarrow{v})|_{\Gamma_f} = 0$. ♢

REMARQUE 1.6.2 — On pose

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{v}) \stackrel{def}{=} \overrightarrow{v} + W(\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k}\ .$$

La démonstration précédente montre que $div\tilde{M}(\overrightarrow{v})$ est proportionnel à

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{v})\,.\,\overrightarrow{n}\ .$$

Par conséquent, en substituant à la condition $(1.6.9)$ la condition

$$(1.6.13) \qquad \overrightarrow{U}(\overrightarrow{v})\,.\,\overrightarrow{n} = 0$$

qui est une condition physique, on voit $\overrightarrow{v}$ satisfait encore la contrainte délocalisée $(1.6.10)$. On peut aussi remarquer que si $\overrightarrow{v}$ satisfait $(1.6.10)$ est nul au fond, alors $W(\overrightarrow{v})$ est automatiquement nul au fond également et donc $(1.6.13)$ est satisfaite. ♢

• *Conclusion.* Le premier travail de modélisation de ce livre est achevé. On a décrit les principes de base en océanographie, ce qui a permis d'écrire les équations gouvernant la circulation océanique avec des conditions aux limites appropriées. Le système obtenu a été simplifié tout en conservant les caractères qualitatifs qui sont importants du point de vue des mathématiques. Le système d'équations aux dérivées partielles finalement retenu est

$$(M1) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}\,\nabla)\,\overrightarrow{v} + W(\overrightarrow{v})\,\partial_z \overrightarrow{v} - \nu_h \Delta \overrightarrow{v} - \nu_v \partial_{zz}^2 \overrightarrow{v} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(f\,\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v} + \nabla p_s - M(\nabla T)\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_t T + (\overrightarrow{v}\,\nabla)\,T + W(\overrightarrow{v})\,\partial_z T - \mathcal{K}_{T,h}\Delta T - \mathcal{K}_{T,v}\partial_{zz}^2 T = 0, \\ (c) & div(\tilde{M}(\overrightarrow{v})) = 0, \\ (d) & \nu_v\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|_{\Gamma_s} = \overrightarrow{\mathrm{v}}, \quad \overrightarrow{v}\,|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (e) & \left(\mathcal{K}_{T,h}\dfrac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v}\dfrac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Bigg|_{\Gamma_s \cup \Gamma_f \cup \Gamma_l} = \alpha\,(T^\star - T), \\ (f) & \overrightarrow{v}\,|_{t=0} = \overrightarrow{v}_0, \quad T|_{t=0} = T_0. \end{cases}$$

Les inconnues de ce système sont $\overrightarrow{v}$, T et p_s et on a posé

$$\begin{cases} \forall\, f \in C(\Omega, I\!\!R), \quad M(f) = M(f)(x,y,z) \stackrel{def}{=} \displaystyle\int_z^0 f(x,y,z')\, dz', \\ \tilde{M}(f)(x,y) \stackrel{def}{=} M(f)(x,y,-H(x,y)) = \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 f(x,y,z')\, dz', \\ W(\overrightarrow{v}) \stackrel{def}{=} M(div\overrightarrow{v}). \end{cases}$$

Les coefficients Ro, f, $\alpha > 0$, $\nu_h > 0$, $\nu_v > 0$, $\mathcal{K}_{T,h} > 0$, $\mathcal{K}_{T,v} > 0$ sont constants et fixés. Le chapitre 2 est entièrement consacré à l'analyse mathématique du système $(M1)$.

CHAPITRE 2

RÉSULTAT D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE AU SYSTÈME DES ÉQUATIONS PRIMITIVES

ORIENTATION

1) Ce chapitre a pour objet l'étude mathématique du sytème $(M1)$ obtenu à la fin du chapitre précédent. Le résultat principal (*cf.* théorème 2.2.1) est un résultat d'existence d'une solution faible à $(M1)$, un résultat montré à l'origine dans LIONS-TEMAM-WANG [1] (1992). Il faut noter que la question de l'unicité et la question de la régularité optimale de la solution restent des problèmes ouverts.

2) Compte tenu de l'analogie qui existe entre le problème posé par le système $(M1)$ et le système classique des équations de Navier-Stokes incompressibles, la méthode utilisée est la méthode de compacité (*cf.* LIONS [1]). Le plan de ce chapitre suit le shéma standard :

- définition des espaces fonctionnels utilisés,
- formulation faible du problème,
- étude d'un système approché,
- estimations à priori,
- passage à la limite dans les équations.

3) La vitesse horizontale est cherchée dans un espace de champs $\vec{v}$ satisfaisant la contrainte $div\tilde{M}(\vec{v}) = 0$. Il faut donc, au moment où l'on définit les espaces fonctionnels, trouver les multiplicateurs de Lagrange associés à cette contrainte. On montre que ce sont des gradients de distributions définies sur Γ_s (*cf.* la section 2.1.3, lemme 2.1.2), ce qui permet d'interpréter la pression superficielle p_s comme un multiplicateur de Lagrange dans le problème. Pour cette raison, p_s disparait de la formulation faible de $(M1)$ qui fait intervenir uniquement les variables $\vec{v}$ et T.

4) La difficulté principale dans la formulation faible du système $(M1)$ est due aux termes de transports qui sont très irréguliers. Pour approcher $(M1)$, on construit le système $(M2)$ en tronquant ces termes et en introduisant le transport tronqué. L'existence d'une solution à $(M2)$ satisfaisant l'égalité d'énergie (*cf.* section 2.1.1) est assurée par les résultats standards. Il faut ensuite passer à la limite lorsque le paramètre

de la troncature tend vers l'infini. Pour cela on obtient d'abord des estimations à priori puis on passe à la limite dans chaque terme de la formulation faible en utilisant une généralisation du lemme d'Aubin due à J. SIMON (*cf.* SIMON [1]).

2. 1 — ESPACES FONCTIONNELS

2.1.1 — PRÉSENTATION DE L'ÉGALITÉ D'ÉNERGIE

Les axes principaux de ce paragraphe sont :

- définition des espaces fonctionnels,
- étude des multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte $div\tilde{M}(\overrightarrow{v}) = 0$,
- étude des espaces emboités pour préparer les applications du lemme d'Aubin.

En premier lieu, on commence par écrire l'égalité d'énergie formelle $(2.1.1)$ qui motive en partie la définition d'un espace où chercher la vitesse $\overrightarrow{v}$ et d'un espace où chercher la variable thermodynamique T (appellée encore température dans la suite, bien que l'on se soit éloigné du contexte physique).

L'égalité *formelle* d'énergie est satisfaite a priori par toute solution "régulière" (pour le moment au moins de classe C^1) $(\overrightarrow{v}, T, p_s)$ du système $(M1)$ et tout $t \in [0, \mathcal{T}]$:

$$(2.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\overrightarrow{v}|^2 - \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\overrightarrow{v}_0|^2 + \nu_h \int_0^t \int_\Omega |\nabla \overrightarrow{v}\,|^2 + \\ \nu_v \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 - \int_0^t \int_{\Gamma_s} \overrightarrow{\mathrm{v}} \,.\, \overrightarrow{v} - \dfrac{1}{Ro}\int_0^t \int_\Omega M(\nabla T).\,\overrightarrow{v} = \ 0, \end{array} \right. \\ (b) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |T|^2 - \dfrac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \mathcal{K}_{T,h} \int_0^t \int_\Omega |\nabla T|^2 + \\ \mathcal{K}_{T,v} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |\partial_z T|^2 - \alpha \int_0^t \int_\Gamma (T^\star - T) \,.\, T = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les arguments justifiant $(2.1.1)$ seront éclaircis d'ici la fin de ce paragraphe et redéveloppés en détails dans le paragraphe 2.4. La méthode est usuelle et consiste à choisir la vitesse $\overrightarrow{v}$ comme fonction test dans l'équation $(M1, a)$ et T comme fonction test dans l'équation $(M1, b)$, puis intègrer par parties. Il faut noter en tout premier lieu que la pression superficielle p_s ne joue aucun rôle dans $(2.1.1)$.

REMARQUE 2.1.1 — On ne sait pas si la "*vraie*" solution du système $(M1)$ qui sera construite d'ici la fin de ce chapitre satisfait l'égalité d'énergie $(2.1.1)$. Seule une inégalité peut être prouvée avec la méthode utilisée (voir l'énoncé du théorème 2.2.1). Ceci constitue un problème ouvert qui se pose également dans le cas des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles (voir par exemple TEMAM [1]). Cette difficulté a des répercutions importantes sur les questions de régularité et sur les problèmes de couplages avec les équations de la turbulence. C'est ce qui motive en partie la modélisation du système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$ faite dans le chapitre 3. $\diamondsuit$

2.1.2 — DÉFINITION DES ESPACES

L'égalité $(2.1.1)$ montre que le gradient de n'importe quelle solution "régulière" est de carré sommable. Cette remarque combinée aux choix des conditions aux limites $(M1, d)$ et à la contrainte $(M1, c)$ motive la définition des espaces introduits.

DÉFINITION 2.1.1 — *Soient les espaces*

$$\begin{cases} \mathcal{E} \stackrel{def}{=} \{v \in C^\infty(\Omega)\,;\, v|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0\}, \\ \mathcal{F} \stackrel{def}{=} \{\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2,\, (u,v) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}\,;\, div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0\}. \end{cases}$$

- *On pose*

$$H^1_{f,l}(\Omega) \stackrel{def}{=} \{v \in H^1(\Omega)\,;\, v|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0\},$$

muni de la norme

$$||v||_{H^1_{f,l}(\Omega)} \stackrel{def}{=} \int_\Omega |\nabla_c v|^2.$$

- *On note* $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *l'adhérence de l'espace* $\mathcal{F}$ *dans l'espace* $[H^1(\Omega)]^2$.

L'espace $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *est normé par la norme de* $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$. *Par analogie avec les équations de Navier-Stokes, on cherche* $\vec{v}$ *dans l'espace* $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc})$ *muni de la norme hilbertienne définie par*

$$||\,\vec{v}\,||_{L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})} = \int_0^T \int_\Omega |\nabla_c \vec{v}\,|^2.$$

On cherche T *dans l'espace habituel* $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ *muni de sa norme usuelle définie par*

$$||T||^2_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))} \stackrel{def}{=} \int_0^T \int_\Omega |\nabla_c T|^2 + \int_0^T \int_\Omega T^2. \qquad \diamondsuit$$

Le fait que $||.||_{H^1_{f,l}(\Omega)}$ soit une norme résulte de l'inégalité de Poincaré, car les éléments de $H^1_{f,l}(\Omega)$ ont une trace nulle sur une portion de Ω.

LEMME 2.1.1 — *L'espace* $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *est un espace de Hilbert non réduit à* $\{0\}$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — L'espace $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ est un espace de Hilbert car c'est un sous-espace fermé dans un espace de Hilbert.
On montre qu'il est non réduit à zéro. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma_s)$ une fonction non nulle et non constante de classe C^∞ sur Γ_s, à support compact et à rotationnel non nul. On pose

$$\overrightarrow{u} = \partial_y \psi \overrightarrow{e}_1 - \partial_x \psi \overrightarrow{e}_2 \in [\mathcal{D}(\Gamma_s)]^2.$$

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{u}$ est non nul, à support compact, de classe C^∞ et à divergence nulle, c'est-à-dire $div\overrightarrow{u} = 0$. Soit ensuite $a(z)$ une fonction non nulle de classe C^∞ à support compact dans l'intervalle $]-\delta, 0[$, où l'on a posé

$$\min_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x,y) \overset{def}{=} \delta > 0. \tag{2.1.2}$$

L'hypothèse $(1.1.1)$ (*i.e.* $\delta > 0$) joue ici un rôle important. On pose

$$R_a(\overrightarrow{u}) \overset{def}{=} a(z)\overrightarrow{u} . \tag{2.1.3}$$

Le champ $R_a(\overrightarrow{u})$ est de classe C^∞ sur Ω et est à support compact. En particulier, $R_a(\overrightarrow{u}) \in [\mathcal{E}]^2$. Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{u}$ ne dépend que de x et de y,

$$\tilde{M}(R_a(\overrightarrow{u})) = \left(\int_{-\delta}^{0} a(z)\,dz\right)\overrightarrow{u},$$

de sorte que

$$div(\tilde{M}(R_a(\overrightarrow{u}))) = 0,$$

ce qui montre que $R_a(\overrightarrow{u}) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$, et ce champ est non identiquement nul. $\diamondsuit$

D'une manière générale, on note

- $\mathcal{Q}^{q,p}_{oc}$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{F}$ dans $[W^{q,p}(\Omega)]^2$.

On montre de même que pour tout $q \geq 1$ et $p \geq 1$, $\mathcal{Q}^{q,p}_{oc}$ est un espace de Banach non réduit à $\{0\}$.

2.1.3 — MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE

L'équation $(M1, c)$ (*i.e.* $div(\tilde{M}(\overrightarrow{v})) = 0$) joue le rôle d'une contrainte dans le système $(M1)$ au même titre que l'équation $div\,\overrightarrow{u} = 0$ dans les équations de Navier-Stokes incompressibles. Donc, par analogie avec avec les équations de Navier-Stokes, il faut trouver les *multiplicateurs de Lagrange* associés à cette contrainte. Les lemmes suivants montrent qu'il sont de la forme ∇p_s, p_s étant une fonction définie sur Γ_s qui ne dépend que de x et de y. C'est ce qui explique pourquoi p_s n'apparaît pas dans l'égalité d'énergie $(2.1.1)$. Ce résultat est une conséquence du théorème de De Rham (*cf.* LIONS ÃĐ[1], TEMAM ÃĐ[1]).

LEMME 2.1.2 — *Soit* $F \in ([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$$\begin{cases} (i) \quad \exists\, p_s \in L^2(\Gamma_s), \quad \textit{tel que} \quad F = \nabla p_s, \\ (ii) \quad \forall\ \vec{v} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}, \quad < F, \vec{v} > = \ 0. \end{cases}$$

De plus, dans l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, p_s *est unique à une constante près.* $\diamondsuit$

Il faut noter que lorsque F et $\vec{v}$ sont “assez réguliers",

$$< F, \vec{v} > = \int_\Omega F \,.\, \vec{v}\ .$$

Avant de montrer le lemme 2.1.2, on a besoin au préalable d'un résultat intermédiaire.

LEMME 2.1.3 — *Soit* $v \in H^1_{f,l}(\Omega)$. *Alors,*

$$\tilde{M}(v) = \int_{-H(x,y)}^0 v\, dz' \in H^1_0(\Gamma_s) \tag{2.1.4}$$

et il existe une constante C *qui ne dépend que de* Ω *et telle que*

$$||\tilde{M}(\vec{v})||_{H^1_0(\Gamma_s)} \leq C ||v||_{H^1_{f,l}(\Omega)}. \tag{2.1.5}$$

$\diamondsuit$

DÉMONSTRATION du lemme 2.1.3 — On considère d'abord $v \in \mathcal{E}$. Comme $v = 0$ sur Γ_l, pour tout $(x,y) \in \partial\Gamma_s$, $\tilde{M}(v)(x,y) = 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} \partial_x \tilde{M}(v) = \partial_x M(v)(x,y,-H(x,y)) - \partial_x H.\, v(x,y,-H(x,y)) = \\ M(\partial_x v)(x,y,-H(x,y)) = \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 \partial_x v\, dz, \end{cases}$$

car $v = 0$ sur Γ_f, ce qui fait que le terme $\partial_x H.\, v(x,y,-H(x,y))$ est nul dans l'égalité précédente. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité précédente, il vient

$$||\partial_x \tilde{M}(v)||^2_{L^2(\Gamma_s)} \leq \sup_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x,y)\, ||\partial_x v||_{L^2(\Omega)}.$$

On estime de la même manière la norme de $\partial_y \tilde{M}(v)$ dans $L^2(\Gamma_s)$. Le résultat se déduit des calculs précédents combinés à un argument de densité. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION du lemme 2.1.2 — On montre $(i) \Rightarrow (ii)$. C'est une conséquence de la formule d'intégration par parties (2.1.6),

$$< \nabla p_s, \vec{v} > = -\int_{\Gamma_s} p_s .\, div(\tilde{M}(\vec{v})), \tag{2.1.6}$$

valable pour tout couple $(p_s, \vec{v}) \in L^2(\Gamma_s) \times [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$. On commence par montrer (2.1.6). Soient $p_s \in L^2(\Gamma_s)$ et $\vec{v} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$, $(p_s^n)_{n\in I\!N}$ une suite constituée d'élements de $C^\infty(\Gamma_s)$ et fortement convergente vers p_s dans $L^2(\Gamma_s)$, $(\vec{v}_n)_{n\in I\!N}$ une suite d'éléments de $[\mathcal{E}]^2$ qui converge vers $\vec{v}$ dans $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$ fort. Comme p_s^n ne dépend pas de z, en utilisant le théorème de Fubini et le résultat du lemme précédent, on a la formule d'intégration par parties

$$\left\{\begin{array}{l} <\nabla p_s^n, \vec{v}_n> = \displaystyle\int_\Omega \nabla p_s^n . \vec{v}_n = \int_{\Gamma_s} \nabla p_s^n . \left(\int_{-H(x,y)}^0 \vec{v}_n \, dz \right) dxdy = \\ \displaystyle\int_{\Gamma_s} \nabla p_s^n . \tilde{M}(\vec{v}_n) \ = \ - \int_{\Gamma_s} p_s^n . div(\tilde{M}(\vec{v}_n)). \end{array}\right.$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 2.1.3, on note que $div \circ \tilde{M}$ définit un opérateur continu de $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$ dans $L^2(\Gamma_s)$. Par conséquent en faisant tendre n vers l'infini, on obtient la formule (2.1.6). L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte de (2.1.6) puisque les éléments de $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ vérifient la contrainte $div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0$.

Réciproquement, on montre que $(ii) \Rightarrow (i)$. Soit $F \in ([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'$ telle que pour tout $\vec{v} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$,

$$< F, \vec{v} > = 0.$$

Il faut montrer que

- F ne dépend que de (x, y),
- F est le gradient d'un élément de $L^2(\Gamma_s)$.

On montre le premier point. On note que la restriction de F à $[H^1_0(\Omega)]^2$ est une distribution sur Ω. Soit $\vec{\phi} \in [C^\infty_c(\Omega)]$. On remarque que $\partial_z \vec{\phi} \in \mathcal{F}$. En effet, puisque $\vec{\phi}$ est à support compact

$$\tilde{M}(\partial_z \vec{\phi}) = 0,$$

en particulier $div(\tilde{M}(\partial_z \vec{\phi})) = 0$. Par conséquent l'hypothèse (ii) implique qu'au sens des distributions,

$$< F, \partial_z \vec{\phi} > = 0 = - < \partial_z F, \vec{\phi} >.$$

On déduit de cette égalité que F ne dépend pas de z (*cf.* SCHWARTZ [1], théorème IV, chapitre 2).
On est en mesure de montrer le deuxième point et conclure. Pour cela, soit un test de la forme $R_a(\vec{u}) = a(z)\,\vec{u} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$, où $\vec{u} \in [H^1_0(\Gamma_s)]^2$ est à divergence nulle (voir la définition (2.1.3) dans la démonstration du lemme 2.1.1). On choisit la fonction a de sorte que

$$\int_{-\delta}^0 a(z)\, dz = 1.$$

Puisque F ne dépend pas de z,

$$< F, R_a(\overrightarrow{u}) >_{([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)',[H^1_{f,l}(\Omega)]^2)} = < F, \overrightarrow{u} >_{((H^{-1}(\Gamma_s))^2,(H^1_0(\Gamma_s))^2)} = 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse (ii) implique

$$\forall \ \overrightarrow{u} \in (H^1_0(\Gamma_s))^2, \quad \text{tel que} \quad div\overrightarrow{u} = 0, \quad < F, \overrightarrow{u} >_{((H^{-1}(\Gamma_s))^2,(H^1_0(\Gamma_s))^2)} = 0.$$

On en déduit d'après le théorème de De Rham que F est le gradient d'une distribution p_s sur Γ_s (unique à une constante près). Le fait que $p_s \in L^2(\Gamma_s)$ résulte des estimations classiques sur “la pression" (*cf.* NECAS ÃĐ[1]). ♢

REMARQUE 2.1.2 — En généralisant les démonstrations des lemmes 2.1.2 et 2.1.3, on obtient :

LEMME 2.1.4 — *Soit $F \in \mathcal{F}'$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

$$\begin{cases} (i) \quad \exists\, p_s \in \mathcal{D}'(\Gamma_s), \quad \textit{tel que} \quad F = \nabla p_s, \\ (ii) \quad \forall \ \overrightarrow{v} \in \mathcal{F}, \quad < F, \overrightarrow{v} > = 0 \end{cases}$$

et le p_s obtenu dans (i) est unique à une constante près. Si de plus $F \in (\mathcal{Q}^{q,p}_{oc})'$ où $q \geq 1$, $p > 1$, alors le p_s obtenu dans l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est dans l'espace $W^{-q+1,p}(\Gamma_s)$. ♢

REMARQUE 2.1.3 — En utilisant le lemme 2.1.4 et en adaptant à ce cadre la démonstration du théorème 1.6 dans TEMAM [1], on voit que pour tout $q \geq 1$, $p > 1$,

$$\mathcal{Q}^{q,p}_{oc} = \{\overrightarrow{v} \in [W^{q,p}(\Omega)]^2 \,;\, \overrightarrow{v}_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0,\ div(\tilde{M}(\overrightarrow{v}) = 0\}.$$

C'est le même problème que dans le cas des espaces adaptés aux équations de Navier-Stokes. ♢

2.1.4 — ESPACES EMBOITÉS

D'une manière générale, la méthode dite de compacité consiste à construire une suite de solutions approchées au problème considéré puis de passer à la limite après avoir obtenu les estimations nécessaires. Pour cela, on a besoin de “compacité". Pour l'obtenir, on se sert du lemme d'AUBIN, généralisé dans SIMON [1], dont on rappelle l'énoncé.

LEMME 2.1.5 — *Soient X, E et Y trois espaces de Banach tels que*

$$X \subset E \subset Y, \tag{2.1.7}$$

où X s'injecte continuement dans E de façon compacte et E s'injecte continuement dans Y. Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée dans $L^p([0, \mathcal{T}], X)$ telle que la suite

$(\partial_t u_n)_{n\in I\!N}$ *soit bornée dans* $L^q([0,\mathcal{T}],Y)$ *où* $(p,q) \in ([1,\infty[)^2$. *Alors la suite* $(u_n)_{n\in I\!N}$ *est relativement compacte dans* $L^{inf(p,q)}([0,\mathcal{T}],E)$. $\diamondsuit$

On parle d'espaces satisfaisant (2.1.7) *d'espaces emboités*. Dans cet énoncé, l'espace E est l'espace pivot.

Il se pose donc le problème de savoir si il y a dans les espaces introduits dans les sections précédentes des espaces emboités, en vue d'utiliser la méthode de compacité.

LEMME 2.1.6 — *On a les injections*

$$\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \subset \mathcal{Q}^{0,2}_{oc} \subset (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'.$$

Chacune est continue et l'injection $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \subset \mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ *est compacte.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On rappelle que $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $[L^2(\Omega)]^2$. Que $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ s'injecte continuement dans $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ résulte de leur construction et la compacité de cette injection est une conséquence du théorème d'injections de Sobolev (*cf.* BRÉZIS ÃĐ[1]). De plus, l'espace $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ est dense dans $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$.

On montre à présent que $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ s'injecte continuement dans $(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'$. Soient $\vec{v} \in \mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ et la forme linéaire continue $i(\vec{v})$ sur $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ définie par

$$\forall\ \vec{x} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}, \quad < i(\vec{v}), \vec{x} > \stackrel{def}{=} \int_\Omega \vec{v} \,.\, \vec{x}\ .$$

On a

$$||i(\vec{v})||_{(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'} \leq C_p || \vec{v} ||_{[L^2(\Omega)]^2},$$

où C_p est la constante de Poincaré. On définit ainsi une application linéaire continue

$$i : \begin{cases} \mathcal{Q}^{0,2}_{oc} \longrightarrow (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})', \\ \quad \vec{v} \longrightarrow i(\vec{v}). \end{cases}$$

Il faut à présent s'assurer que i est une injection. Soit $\vec{v} \in Ker(i)$. Il existe une suite $(v_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ convergente vers $\vec{v}$ dans $[L^2(\Omega)]^2$ fort. Puisque $\mathcal{F} \subset \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$, pour chaque entier n, $\vec{v}_n \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$. De plus, comme $i(\vec{v}) = 0$, on a

$$\forall n \in I\!N, \quad < i(\vec{v}), \vec{v}_n > = 0 = \int_\Omega \vec{v} \,.\, \vec{v}_n\ .$$

En faisant tendre n vers l'infini dans cette égalité, on obtient $|| \vec{v} ||_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui montre que $\vec{v} = 0$ et que i est une injection. $\diamondsuit$

L'énoncé précédent est utile à l'existence d'une solution au système approché $(M2)$ écrit dans le §2.3, où l'on tronque les termes de transport. En revanche, il n'est pas efficace au passage à la limite dans les équations de $(M1)$ où les termes de transport ne sont bornés que dans des espaces de type L^1 (*cf.* section 2.2.1 plus loin). C'est pourquoi on a besoin de l'énoncé plus faible :

LEMME 2.1.7 — *On a les injections*

$$\mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \subset \mathcal{Q}_{oc}^{0,1} \subset (\mathcal{Q}_{oc}^{2,2})',$$

chacune étant continue, l'injection $\mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \subset \mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$ étant compacte. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On rappelle que $\mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$ est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $[L^1(\Omega)]^2$. De plus, H est de classe C^1, ce qui joue un rôle important dans cette démonstration.
Le fait que $\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ s'injecte continuement dans $\mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$ résulte de leur construction et la compacité de cette injection est une conséquence du théorème d'injections de Sobolev. Comme précédemment, $\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ est dense dans $\mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$.
On montre à présent que $\mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$ s'injecte continuement dans $(\mathcal{Q}_{oc}^{2,2})'$. On note en premier lieu que puisque $\mathcal{Q}_{oc}^{2,2}$ est inclus dans $[W^{2,2}(\Omega)]^2$, d'après le théorème d'injections de Sobolev, les éléments de $\mathcal{Q}_{oc}^{2,2}$ ont des coordonnées dans $L^\infty(\Omega)$ et il existe une constante C qui ne dépend que de Ω telle que

$$\forall\ \vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2 \in \mathcal{Q}_{oc}^{2,2}, \quad sup(||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||v||_{L^\infty(\Omega)}) \leq C||\,\vec{v}\,||_{\mathcal{Q}_{oc}^{2,2}}.$$

Par conséquent,

$$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{Q}_{oc}^{2,2}, \quad \forall\ \vec{w} \in \mathcal{Q}_{oc}^{0,1}, \quad \left| \int_\Omega \vec{v}\,.\vec{w} \right| \leq C\,||\,\vec{v}\,||_{\mathcal{Q}_{oc}^{2,2}} ||\vec{w}\,||_{\mathcal{Q}_{oc}^{0,1}}.$$

Cela permet de définir une application linéaire continue

$$i : \begin{cases} \mathcal{Q}_{oc}^{0,1} \longrightarrow (\mathcal{Q}_{oc}^{2,2})', \\ \quad \vec{w} \longrightarrow i(\vec{w}), \end{cases}$$

où

$$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{Q}_{oc}^{2,2}, \quad < i(\vec{w}), \vec{v} > = \int_\Omega \vec{v}\,.\vec{w}\ .$$

Il faut montrer que i est une injection. Soit $\vec{w} \in Ker(i)$. On a

$$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{Q}_{oc}^{2,2}, \quad \int_\Omega \vec{v}\,.\vec{w} = 0.$$

En appliquant le lemme 2.1.4, on sait qu'il existe un unique $P \in W^{1,1}(\Gamma_s)$ telle que

$$\int_{\Gamma_s} P = 0, \quad \vec{w} = \nabla P.$$

En particulier, $\vec{w}$ ne dépend pas de z. De plus, puisque $\vec{w} \in \mathcal{Q}_{oc}^{0,1}$, $\vec{w}$ satisfait la contrainte $div\tilde{M}(\vec{w}) = 0$. On déduit du lemme 2.4.1 que

$$\forall\ \phi \in C^2(\Gamma_s), \quad \int_{\Gamma_s} \nabla\phi \int_{-H(x,y)}^{0} \vec{w} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\forall\ \phi \in C^2(\Gamma_s), \quad \int_{\Gamma_s} H(x,y)\,\nabla P.\nabla\phi = 0.$$

Soit

$$C^2_n(\Gamma_s) \stackrel{def}{=} \left\{\phi \in C^2(\Gamma_s)\,;\ \left.\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Gamma_s} = 0\right\}.$$

Ce qui précède s'écrit encore,

$$\forall\ \phi \in C^2(\Gamma_s), \quad \int_{\Gamma_s} P\,div(H(x,y)\nabla\phi) = 0.$$

Soit $g \in C^1_c(\Gamma_s)$ de moyenne nulle. Comme H est de classe C^1, il existe un unique $\phi \in C^2_n(\Gamma_s)$ tel que

$$div(H(x,y)\,\nabla\phi) = g,$$

(*cf.* BRÉZIS [1]). Par conséquent, P vérifie

$$\forall\ g \in C^1_c(\Gamma_s),\ \text{telle que} \int_{\Gamma_s} g = 0, \quad \int_{\Gamma_s} P\,g = 0.$$

Soient enfin

$$g \in C^1_c(\Gamma_s), \quad \tilde{g} = g - \int_{\Gamma_s} g.$$

Comme P est de moyenne nulle, on a

$$\int_{\Gamma_s} P\,g = \int_{\Gamma_s} P\,\tilde{g} - \left(\int_{\Gamma_s} g\right)\left(\int_{\Gamma_s} P\right) = 0.$$

On en déduit $P = 0$ et par suite $\vec{w} = 0$, c'est-à-dire $Ker(i) = 0$, permettant d'affirmer que i est une injection et d'achever la démonstration. ♢

2. 2 — FORMULATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS PRIMITIVES

2.2.1 — SENS FAIBLE ET RÉSULTAT D'EXISTENCE

Les espaces fonctionnels et les multiplicateurs de Lagrange liés au problème sont à présent définis et on est en mesure de donner une formulation faible au système $(M1)$

écrit sous la forme

$$(M1)\quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(f\,\vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s - M(\nabla T)\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_t T + (\vec{v}\,\nabla)\,T + W(\vec{v})\,\partial_z T - \mathcal{K}_{T,h}\Delta T - \mathcal{K}_{T,v}\partial^2_{zz} T = 0, \\ (c) & (\vec{v}, T) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega)), \\ (d) & \nu_v\,\partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \\ (e) & \left(\mathcal{K}_{T,h}\dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v}\dfrac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \alpha\,(T^\star - T), \\ (f) & (\vec{v}, T)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0). \end{cases}$$

Les axes principaux de ce paragraphe sont :

- définition de la forme faible donnée à $(M1)$,
- lien entre la forme faible et la pression superficielle,
- justification de l'égalité d'énergie pour des solutions régulières.

Bien que ce problème ressemble beaucoup au problème des équations de Navier-Stokes, il admet une difficulté supplémentaire que l'on ne trouve pas dans celles-ci. Cette difficulté est liée au terme de transport vertical. En effet, on rappelle que

$$W(\vec{v}) = M(div\vec{v}) = \int_z^0 div\vec{v}\ dz'.$$

En cherchant $\vec{v}$ dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc})$, on voit que $W(\vec{v})$ est $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$, de sorte que les termes

$$W(\vec{v})\,.\,\partial_z \vec{v}, \quad W(\vec{v})\,.\,\partial_z T$$

dans les équations $(M1,a)$ et $(M1,b)$ sont dans l'espace $[L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)]^2$ et dans l'espace $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ respectivement et a priori pas mieux. Pour cette raison, on est conduit à choisir pour le système $(M1)$ un espace de fonctions tests plus régulières que celles utilisées dans les problèmes paraboliques usuels. Afin d'éviter des complications techniques inutiles, on travaille avec comme formulation faible la formulation au sens des distributions (*cf.* la remarque 2.2.1).

Dans la suite, $\mathcal{T} > 0$ est un temps fixé. La définition 2.2.1 plus loin est une formulation au sens des distributions et utilise les résultats des lemmes 2.1.2 et 2.1.4. Ceux-ci montrent qu'en multipliant l'équation $(M1,a)$ (vérifiée par $\vec{v}$) par un vecteur $\vec{x}$ qui satisfait $div(\tilde{M}(\vec{x})) = 0$ et en intégrant par parties, la pression superficielle p_s disparait du résultat obtenu. On rappelle que

$$\vec{U}\,(\vec{v}) \overset{def}{=} \vec{v} + W(\vec{v})\,\vec{k} = \vec{v} + \left(\int_z^0 div\vec{v}\ dz'\right)\vec{k}\ .$$

Par ailleurs, les formules d'intégration par parties classiques montrent que pour tout $(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$ satisfaisant les conditions aux limites $(M1, d)$ et $(M1, e)$ et pour tout $(\vec{x}, \tau) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$, on a

$$
(2.2.1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} < -\nu_h \Delta \vec{v}, \vec{x} > = \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla \vec{v} \,.\, \nabla \vec{x}, \\ < -\nu_v \partial^2_{zz} \vec{v}, \vec{x} > = -\displaystyle\int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \,.\, \vec{x} + \nu_v \displaystyle\int_\Omega \partial_z \vec{v} \,.\, \partial_z \vec{x}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K}_{T,h} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta T) \,.\, \tau + \mathcal{K}_{T,v} \displaystyle\int_\Omega (-\partial^2_{zz} T) \,.\, \tau = \\ \mathcal{K}_{T,h} \displaystyle\int_\Omega \nabla T . \nabla \tau + \mathcal{K}_{T,v} \displaystyle\int_\Omega \partial_z T .\, \partial_z \tau - \alpha \displaystyle\int_{\partial\Omega} (T^\star - T) \,.\, \tau. \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

DÉFINITION 2.2.1 — *On appelle "problème* $(\mathrm{Faib1})$*" le problème variationnel,*

- *trouver* $(\vec{v}, T) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega))$, *tel que* $\forall\, t \in]0, \mathcal{T}], \quad \forall\, (\vec{x}, \tau) \in C^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{F}) \times C^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$,*ÃĐ*

$$
(\mathrm{Faib1}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \vec{v}\,(t, M) \,.\, \vec{x}\,(t, M)\, dM - \displaystyle\int_\Omega \vec{v}_0 \,.\, \vec{x}\,(0, M)\, dM - \\ \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \vec{v} \,.\, \partial_t \vec{x} \; + \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega [\vec{U}\,(\vec{v}) \nabla_c](\vec{v}) \,.\, \vec{x} \; + \\ \nu_h \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \nabla \vec{v} . \nabla \vec{x} + \nu_v \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \partial_z \vec{v} \,.\, \partial_z \vec{x} \; - \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} . \vec{x} \; + \\ \dfrac{1}{Ro} \left(\displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega f \, \vec{k} \times \vec{v} \,.\, \vec{x} - \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T) \,.\, \vec{x} \right) = 0, \end{array} \right. \\ (b) & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega T(t, M)\, dM - \displaystyle\int_\Omega T_0 .\, \tau(0, M)\, dM - \\ \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega T \,.\, \partial_t \tau \; + \mathcal{K}_{T,h} \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \nabla T . \nabla \tau + \\ \mathcal{K}_{T,v} \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \partial_z T .\, \partial_z \tau \; + \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_\Omega \tau\, \vec{U}\,(\vec{v}) \,.\, \nabla_c T - \\ \alpha \displaystyle\int_0^t \displaystyle\int_{\partial\Omega} (T^\star - T)\, \tau = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.
$$

THÉORÈME 2.2.1 — *On suppose que*

(i) $(\vec{v}_0, T_0) \in \mathcal{Q}^{0,2}_{oc} \times L^2(\Omega)$,
(ii) $\vec{\mathrm{v}} \in [L^2([0, \mathcal{T}], \Gamma_s)]^2$.

Le problème $(\mathrm{Faib1})$ *admet une solution*

$$
(\vec{v}, T) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega))
$$

telle que

$$(\partial_t \vec{v}, \partial_t T) \in L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})') \times L^1([0,\mathcal{T}], (W^{2,2}(\Omega))'), \tag{2.2.2}$$

et telle que soit satisfaite l'inégalité pour presque tout $t \in]0,\mathcal{T}]$,

$$\left\{\begin{array}{ll} (a) & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{v}|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{v}_0|^2 + \nu_h \int_0^t \int_\Omega |\nabla \vec{v}\,|^2 + \\ \nu_v \int_0^t \int_\Omega |\partial_z \vec{v}\,|^2 - \int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}.\,\vec{v} - \frac{1}{Ro}\int_0^t \int_\Omega M(\nabla T).\,\vec{v} \leq 0, \end{array}\right. \\ (b) & \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_\Omega |T|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \mathcal{K}_{T,h}\int_0^t \int_\Omega |\nabla T|^2 + \\ \mathcal{K}_{T,v}\int_0^t \int_\Omega |\partial_z T|^2 - \alpha \int_0^t \int_\Gamma (T^\star - T)\,.\,T \leq 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{2.2.3}$$

appelée inégalité d'énergie. $\diamondsuit$

Ce résultat est le résultat principal de ce chapitre et sa démonstration sera complète à la fin du dit chapitre. On suppose tout au long que les hypothèses (i) et (ii) de l'énoncé du théorème 2.2.1 sont satisfaites.

REMARQUE 2.2.1 — La formulation (Faib1) est équivalente à :

- trouver $(\vec{v}, T) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ tel que
  $\forall (\vec{x}, \tau) \in (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \cap [L^\infty(\Omega)]^2) \times (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$,

$$(\mathrm{Faib}'1) \quad \left\{\begin{array}{ll} (a) & \left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int_\Omega \vec{v}\,.\,\vec{x} + \int_\Omega [\vec{U}\,(\vec{v})\nabla_c](\vec{v})\,.\,\vec{x} + \\ \nu_h \int_\Omega \nabla\vec{v}\,.\nabla\vec{x} + \nu_v \int_\Omega \partial_z \vec{v}\,.\,\partial_z \vec{x} - \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{x} + \\ \frac{1}{Ro}\left(\int_\Omega f\,\vec{k} \times \vec{v}\,.\,\vec{x} - \int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{x}\right) = 0 \end{array}\right. \\ (b) & \left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\int_\Omega T\,.\,\tau + \int_\Omega \vec{U}\,(\vec{v})\nabla_c T\,\tau + \mathcal{K}_{T,h}\int_\Omega \nabla T.\nabla\tau + \\ \mathcal{K}_{T,v}\int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z \tau - \alpha\int_{\partial\Omega}(T^\star - T)\,\tau = 0, \end{array}\right. \\ (c) & (\vec{v}, T)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0), \end{array}\right.$$

au sens de $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}])$ $\diamondsuit$

2.2.2 — LIEN ENTRE LA FORMULATION FAIBLE ET LA PRESSION SUPERFICIELLE

La formulation variationnelle (Faib1) est obtenue après avoir multiplié les deux premières équations du système $(M1)$ par des tests, ceux pour la vitesse vérifiant la contrainte $div(\tilde{M}(\vec{x})) = 0$ et en intégrant par parties. Il se pose la question de savoir si en résolvant le problème (Faib1) on a résolu le système $(M1)$ au moins dans un certain sens. En particulier qu'advient-il de la pression de surface p_s ?

PROPOSITION 2.2.1 — *Soit* $(\vec{v}, T) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega))$ *une solution du problème variationnel* (Faib1). *Alors, il existe*

$$p_s \in \mathcal{D}([0, \mathcal{T}], W^{-1,2}(\Gamma_s)),$$

telle que le triplet $(\vec{v}, T, p_s)$ *soit une solution du système* $(M1)$ *au sens des distributions.* $\diamondsuit$

On rappelle que $(\vec{v}, T, p_s)$ est une solution de $(M1)$ au sens des distributions si et seulement si pour tout $(\vec{x}, \tau) \in C^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{F}) \times C^\infty([0, \mathcal{T}], \mathcal{D}(\Omega))$ avec $(\vec{x}(\mathcal{T}, .), \tau(\mathcal{T}, .)) = (0, 0)$, on a

$$\left\{\begin{array}{ll}
(a) & \left\{\begin{array}{l}
-\displaystyle\int_\Omega \vec{v}_0 \,.\, \vec{x}\,(0, M)\, dM - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \vec{v} \,.\, \partial_t \vec{x} \; + \\
\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega [\vec{U}(\vec{v})\nabla_c](\vec{v}) \,.\, \vec{x} \; + \\
\nu_h \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla\vec{v} \,.\nabla\vec{x} + \nu_v \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \partial_z \vec{v} \,.\, \partial_z \vec{x} - \int_0^{\mathcal{T}}\int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}.\, \vec{x} + \\
\dfrac{1}{Ro}\left(\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega f\, \vec{k} \times \vec{v} \,.\, \vec{x} - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega M(\nabla T) \,.\, \vec{x}\right) - \\
\dfrac{1}{Ro} < p_s, div(\tilde{M}(\vec{x})) > = 0,
\end{array}\right. \\
(b) & \left\{\begin{array}{l}
-\displaystyle\int_\Omega T_0 .\, \tau(0, M)\, dM - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega T \,.\, \partial_t \tau + \\
\mathcal{K}_{T,h} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla T . \nabla\tau \; + \mathcal{K}_{T,v} \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \partial_z T .\, \partial_z \tau + \\
\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \tau\, \vec{U}(\vec{v}) \,.\nabla_c T \; - \alpha \int_0^{\mathcal{T}}\int_{\partial\Omega} (T^\star - T)\, \tau = 0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

en utilisant la formule d'intégration par parties (2.1.6) de la démonstration du lemme 2.1.2 pour définir le terme de pression.

DÉMONSTRATION de la proposition 2.2.1 — Soit $(\vec{v}, T)$ une solution du problème (Faib1). On pose pour tout $t \in]0, \mathcal{T}]$,

$$\vec{V}(t) = \int_0^t \vec{v}(t', M)\, dt', \quad \tilde{T}(t, M) = \int_0^t T(t', M)\, dt'.$$

On choisit un test $\vec{x} \in \mathcal{F}$ qui ne dépend pas du temps dans l'égalité $(\mathrm{Faib1}, a)$. Il vient à l'aide du théorème de Fubini,

$$(2.2.4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\vec{v}\,(t,M) - \vec{v}_0\,(M))\,.\,\vec{x}\,(M)\,dM + \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\int_0^t (\vec{U}\,(\vec{v})(t',M)\nabla_c)(\vec{v}\,(t',M))\,dt'\right).\,\vec{x}\,(M)\,dM + \\ \displaystyle\nu_h \int_\Omega \nabla\vec{V}(t,M)\,.\nabla\vec{x}\,(M)\,dM + \nu_v \int_\Omega \partial_z\vec{V}(t,M)\,.\,\partial_z\vec{x}\,(M) - \\ \displaystyle\int_{\Gamma_s} \left(\int_0^t \vec{\mathrm{v}}\,(t',M)\,dt'\right).\,\vec{x}\,(M)\,dM + \\ \displaystyle\frac{1}{Ro}\left(\int_\Omega f\,\vec{k} \times \vec{V}\,(t,M)\,.\,\vec{x}\,(M)\,dM\right. - \\ \displaystyle\left.\int_\Omega M(\nabla\tilde{T}(t,M))\,.\,\vec{x}\,(M)\,dM\right) = 0. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} F(t,M) \stackrel{def}{=} (\vec{v}\,(t,M) - \vec{v}_0\,(M)) + \displaystyle\int_0^t (\vec{U}\,(\vec{v})(t',M)\nabla_c)(\vec{v}\,(t',M))\,dt' - \\ \nu_h\Delta\vec{V} - \nu_v\partial^2_{zz}\vec{V} + \displaystyle\frac{1}{Ro}\left(f\,\vec{k} \times \vec{V} - M(\nabla\tilde{T})\right). \end{cases}$$

Grâce à l'affirmation (2.2.2) (régularité des dérivées par rapport au temps) de l'énoncé du théorème 2.2.1, on sait que

$$\vec{V} \in C([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})').$$

Par ailleurs, on a

$$(\vec{U}\,(\vec{v})\nabla_c)(\vec{v}) = u\,\partial_x\vec{v} + v\,\partial_y\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v},$$

avec

$$\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2\,.$$

Le terme qui pose problème est le terme $W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v}$. Comme $\vec{v} \in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})$,

$$W(\vec{v}) = M(div\vec{v}) = \int_z^0 div\vec{v} \in L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega),$$

de sorte que

$$W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v} \in L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega).$$

Or (*cf.* la démonstration du lemme 2.1.5), $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ est inclus dans $(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})'$, ce qui implique que

$$\int_0^t (\vec{U}(\vec{v})(t',M)\nabla_c)(\vec{v}(t',M))\,dt' \in C([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})').$$

Les autres termes définissant F sont dans $C([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})')\subset C([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})')$. Par conséquent

$$F \in C([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})').$$

Enfin, les conditions aux limites sont

$$\vec{V}\,|_{\Gamma_l\cap\Gamma_f}=0, \quad \nu_v\left.\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right|_{\Gamma_s}=\int_0^t \vec{\mathrm{v}}\ .$$

L'égalité $(2.2.4)$, combinée à un argument de densité devient

$$\forall\ \vec{x}\in\mathcal{Q}^{2,2}_{oc},\quad \forall\,t\in[0,\mathcal{T}],\quad <F(t,.),\vec{x}>=0.$$

En appliquant le lemme 2.1.4, on déduit de ce qui précède qu'il existe

$$P_s\in C([0,\mathcal{T}],W^{-1,2}(\Gamma_s)),$$

unique à une constante près et telle que $F=\nabla P_s$. Posons

$$p_s=\partial_t P_s\ \in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}],W^{-1,2}(\Gamma_s)).$$

Le triplet $(\vec{v},T,p_s)$ satisfait bien l'équation $(M1,a)$ au sens des distributions, ce qui conclut cette démonstration. $\diamondsuit$

On dispose maintenant du cadre dans lequel entreprendre la démonstration d'un résultat d'existence d'une solution à $(M1)$. Mais avant, on fait quelques commentaires sur l'égalité de l'énergie dans la section suivante.

2.2.3 — JUSTIFICATION HEURISTIQUE DE L'ÉGALITÉ D'ÉNERGIE

On donne ici les arguments justifiant l'égalité formelle d'énergie $(2.1.1)$. Cette égalité est obtenue en supposant la solution $(\vec{v},T)$ du problème variationnel $(\mathrm{Faib1})$ de classe C^∞ sur $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ (pour le moment), ce que l'on ne sait pas prouver bien sûr et ce qui est peu probable. Il faut penser dans ce cas à une “*solution numérique*" ou encore solution approchée. On choisit alors $(\vec{v},T)$ comme test dans la formulation variationnelle $(\mathrm{Faib1})$.

On note que les termes de transport et le terme de Coriolis ne travaillent pas. En ce qui concerne le terme de Coriolis, cela provient du fait que

$$\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{v}=0,$$

une égalité valable pour n'importe quel vecteur tridimensionnel. En ce qui concerne le terme de transport, on montre le lemme 2.2.1 qui termine entièrement la justification de l'égalité formelle d'énergie.

LEMME 2.2.1 — *Soit* $(\vec{x}, \tau) \in \mathcal{F} \times C^\infty(\Omega)$. *Alors,*

$$\int_\Omega [\vec{U}(\vec{x})\nabla_c](\vec{x}) \,.\, \vec{x} = 0, \quad \int_\Omega \vec{U}(\vec{x})\nabla_c \tau \,.\, \tau = 0, \tag{2.2.5}$$

où l'on rappelle que

$$\vec{U}(\vec{x}) = \vec{x} + W(\vec{x})\vec{k} = \vec{x} + \left(\int_z^0 div \vec{x} \; dz'\right)\vec{k} \; . \qquad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — Soit $(\vec{x}, \tau) \in \mathcal{F} \times C^\infty(\Omega)$. Une intégration par parties montre que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega [\vec{U}(\vec{x})\nabla_c](\vec{x}) \,.\, \vec{x} = \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} |\,\vec{x}\,|^2 \, \vec{U}(\vec{x}) \,.\, \vec{n} - \int_\Omega [\vec{U}(\vec{x})\nabla_c](\vec{x}) \,.\, \vec{x} - \int_\Omega |\,\vec{x}\,|^2 div_c \vec{U}(\vec{x}). \end{array} \right. \tag{2.2.6}$$

D'après la remarque 1.6.2, on sait que

$$\vec{U}(\vec{x}) \,.\, \vec{n} \,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Par ailleurs, par construction,

$$div_c \vec{U}(\vec{x}) = 0.$$

L'égalité $(2.2.6)$ montre la première partie de l'affirmation $(2.2.5)$. La deuxième partie de cette affirmation résulte du même argument. $\diamondsuit$

L'égalité formelle d'énergie est justifiée heuristiquement. Bien que non démontrée dans le cas des équations primitives, elle a guidé en partie le choix des espaces fonctionnels introduits. L'autre motivation est le résultat des lemmes 2.1.2 et 2.1.4 sur les multiplicateurs de Lagrange qui ont permis de faire le lien entre la formulation faible $(\mathrm{Faib1})$ et le système $(M1)$. Les deux paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème d'existence 2.2.1.

2. 3 — SYSTÈME APPROCHÉ POUR LES ÉQUATIONS PRIMITIVES

2.3.1 — POSITION DU PROBLÈME

Lorsque l'on veut montrer un résultat d'existence d'une solution faible à un système dont la structure est non standard par une méthode de compacité, on essaye de trouver un *système approché* dont la structure est classique pour pouvoir appliquer des théorèmes connus. Ensuite, on passe à la limite dans les équations après avoir obtenu les estimations nécessaires. Ce paragraphe a pour objet la construction d'un système approché aux équations primitives $(M1)$, le système $(M2)$ construit de sorte que

- une solution de $(M2)$ est “presque" une solution de $(M1)$,
- toute solution de $(M2)$ satisfait l'égalité d'énergie.

On a noté dans le paragraphe précédent que la difficulté principale dans le problème $(\mathrm{Faib1})$ (et donc dans $(M1)$) provenait des termes de transport, que l'on veut régulariser tout en préservant une identité analogue à $(2.2.5)$ (*cf.* lemme 2.2.1, “le transport ne travaille pas") pour obtenir des estimations. On le fait en utilisant des troncatures. Dans ce paragraphe 2.3,

- on définit la fonction de troncature en rappelant ses principales propriétés,
- on régularise les termes de transport dans les équations de $(M1)$ en introduisant ce que l'on a appelé *le transport tronqué*,
- on établit les principales propriétés du transport tronqué (*cf.* les lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4),
- on écrit le système approché $(M2)$ et on lui donne une formulation faible, le résultat d'existence etant un résultat standard.

2.3.2 — DÉFINITION DE LA FONCTION DE TRONCATURE

Soit $j > 0$ un réel donné. La fonction de troncature à hauteur j est notée dans tout cet ouvrage β_j (au lieu de la notation plus souvent utilisée T_j, pour éviter les confusions avec la température T).

DÉFINITION 2.3.1 — *Soit la fonction de troncature* β_j

figure 2.3.1

Elle est définie par la formule

$$(2.3.1) \qquad \beta_j(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x & si\ |x| \leq j \\ j\,\dfrac{x}{|x|} & si\ |x| \geq j. \end{cases}$$

La primitive de β_j *s'annulant en* 0 *est notée* Λ_j,

$$(2.3.2) \qquad \Lambda_j(x) \stackrel{def}{=} \int_0^x \beta_j(x')\,dx'. \qquad \diamondsuit$$

On rappelle les trois propriétés de la troncature dont on se sert le plus. On peut trouver la démonstration de ces résultats dans MURAT [1].

1) $\forall\, v \in L^1(\Omega)$, $\beta_j(v) \in L^\infty(\Omega)$ et $||\beta_j(v)||_{L^\infty(\Omega)} \leq j$.

2) $\forall\, v \in H^1(\Omega)$, $\beta_j(v) \in H^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |\nabla_c \beta_j(v)|^2 = \int_{\{|v|\leq j\}} |\nabla_c v|^2.$$

De plus, la suite $(\beta_j(v))_{j\in N}$ converge fortement vers v dans $H^1(\Omega)$.

3) $\forall\, v \in L^p(\Omega)$, $(p \geq 1)$, la suite $(\beta_j(v))_{j\in \mathbb{N}}$ converge vers v dans $L^p(\Omega)$ fort.

Cette liste n'est pas exhaustive. On rappelle les autres propriétés de la troncature au fur et à mesure des besoins.

Enfin, on pose

$$\forall\ \vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2, \quad \beta_j(\vec{v}) \overset{def}{=} \beta_j(u)\,\vec{e}_1 + \beta_j(v)\,\vec{e}_2, \tag{2.3.3}$$

ce qui définit la troncature d'un champ de vecteurs.

2.3.3 — DÉFINITION DU TRANSPORT TRONQUÉ

Les termes de transport sont régularisés par des troncatures, de telle sorte que le transport régularisé “ne travaille pas" (*cf.* le lemme 2.2.1 puis le lemme 2.3.1 plus loin).

DÉFINITION 2.3.2 — *Soient* $(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$, $j \in [1, +\infty[$. *On pose*

$$\begin{cases} \forall\, (\vec{x}, \tau) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega), \\ < B_j(\vec{v}), \vec{x} >= -\displaystyle\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\vec{x})\,.\,\beta_j(\vec{v}), \\ < C_j(\vec{v}, T), \tau >= -\displaystyle\int_\Omega \beta_j(T)\,\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \tau, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

définissant des opérateurs sur $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *et* $H^1(\Omega)$. $\diamondsuit$

Il faut noter que les termes intervenant dans (2.3.4) ont un sens. En effet, soit $(\vec{v}, \vec{x}, T, \tau) \in [\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}]^2 \times [H^1(\Omega)]^2$; alors en écrivant

$$\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2, \quad \vec{x} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2,$$

on a

$$\begin{cases} (\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\vec{x}) = \\ (u\,\partial_x x + v\,\partial_y x + W(\vec{v})\,\partial_z x)\,\vec{e}_1 + (u\,\partial_x y + v\,\partial_y y + W(\vec{v})\,\partial_z y)\,\vec{e}_2\ . \end{cases}$$

Chaque coordonnée de ce vecteur est le produit de fonctions de $L^2(\Omega)$ et est donc une fonction de $L^1(\Omega)$, en particulier les termes $W(\vec{v})\,\partial_z x$ et $W(\vec{v})\,\partial_z y$ qui ne sont a priori pas mieux que dans $L^1(\Omega)$. Comme les coordonnées du vecteur $\beta_j(\vec{v})$ sont dans $L^\infty(\Omega)$, le produit scalaire

$$(\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c)(\vec{x}).\beta_j(\vec{v})$$

est dans $L^1(\Omega)$. Une analyse analogue montre que

$$\beta_j(T)\,\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c\tau \in L^1(\Omega).$$

Ensuite, on remarque qu'une intégration par parties utilisant

$$\vec{U}(\vec{v}).\vec{n}\;|_{\partial\Omega} = 0, \quad div_c(\vec{U}(\vec{v})) = 0,$$

conduit à (*cf.* la démonstration du lemme 2.3.2 plus bas, d'abord lorsque $\vec{v}$ est régulière pour pouvoir définir $\vec{U}(\vec{v})$ sur $\partial\Omega$, puis en raisonnant par densité),

$$\begin{cases} \forall\,(\vec{x},\tau) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega), \\ < B_j(\vec{v}), \vec{x}> = \displaystyle\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c)(\beta_j(\vec{v})).\,\vec{x}, \\ < C_j(\vec{v}, T), \tau > = \displaystyle\int_\Omega \tau\,\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c\beta_j(T), \end{cases}$$

Donc, on peut écrire formellement

$$B_j(\vec{v}) = (\vec{U}(\vec{v}).\nabla_c)(\beta_j(\vec{v})), \quad C_j(\vec{v}, T) = \vec{U}(\vec{v}).\nabla_c\beta_j(T).$$

Dans la suite, on remplace les termes de transport dans $(M1)$ par les termes de transport tronqué (système $(M2)$). Mais au préalable, on dresse la liste des principales propriétés du transport tronqué nécessaires à un résultat d'existence à $(M2)$.

2.3.4 — PROPRIÉTÉS DU TRANSPORT TRONQUÉ

La définition du transport tronqué suggère quelques questions.

- (i) La définition 2.3.2 permet-elle de définir des opérateurs continus sur $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ et $H^1(\Omega)$ et dans quel sens ?
- (ii) Est-il vrai que le transport tronqué ne travaille pas ?
- (iii) Peut-on passer à la limite dans le transport tronqué ?
- (iv) Est-ce que lorsque l'on fait tendre j vers l'infini on retrouve les termes de transport intervenant dans les équations primitives et si oui dans quel sens ?ÃĐ

Chacune de ces questions admet une réponse positive.

La réponse à la question (i) dit en substance qu'en changeant les termes de transport par les termes de transport tronqués dans les équations, on obtient un problème bien posé dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$ et que la structure du système obtenu est la même que celle des équations Navier-Stokes “régulières".
La réponse à la question (ii) est essentielle à l'obtention d'estimations à priori.
La réponse à la question (iii) permet l'application d'une méthode de compacité.
Enfin, la réponse à question (iv) justifie la consistance de cette définition car on se demande si en faisant tendre j vers l'infini on retrouve bien les termes de départ, c'est-à-dire si l'on a vraiment approché le système $(M1)$ grâce à cet artefact. Les réponses rigoureuses sont données par la succession des lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4.

LEMME 2.3.1 — *Soient* $(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$*,* $j \in [1, +\infty[$*. Les opérateurs* $B_j(\vec{v})$ *et* $C_j(\vec{v}, T)$ *définis par* (2.3.4) *sont des opérateurs linéaires continus sur* $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *et* $H^1(\Omega)$ *respectivement.* ♢

DÉMONSTRATION — On note en premier lieu qu'il existe une constante C qui ne dépend que de Ω et telle que

$$||\vec{U}(\vec{v})||_{[L^2(\Omega)]^3} \le C||\vec{v}||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}. \tag{2.3.5}$$

On démontre la continuité de $B_j(\vec{v})$. Soit $\vec{x} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$. Alors, en utilisant (2.3.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$| < B_j(\vec{v}), \vec{x} > | \le 6\,C\,j\,||\vec{v}||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}||\vec{x}||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}.$$

On en déduit que $B_j(\vec{v}) \in (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'$ et que

$$||B_j(\vec{v})||_{(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'} \le 6\,C\,j\,||\vec{v}||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}.$$

Un argument analogue montre que $C_j(\vec{v}, T) \in (H^1(\Omega))'$ et

$$||C_j(\vec{v}, T)||_{(H^1(\Omega))'} \le 3\,C\,j\,||\vec{v}||_{H^1(\Omega)}.$$ ♢

LEMME 2.3.2 — *Pour tout* $(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$ *et pour tout* $j \in [1, +\infty[$*,*

$$< B_j(\vec{v}), \vec{v} > = 0, \quad < C_j(\vec{v}), T), T > = 0. \tag{2.3.6}$$ ♢

DÉMONSTRATION — Ce résultat se démontre en utilisant une intégration par parties et la propriété 2) de la troncature rappelée plus haut. Le problème réside dans le fait que

$$\vec{v} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}, \quad \vec{U}(\vec{v}) \in L^2(\Omega)$$

et donc on ne peut pas définir la trace de ce vecteur sur $\partial\Omega$ et justifier directement une intégration par parties. C'est pourquoi la démonstration se fait en deux étapes :

1) démonstration de (2.3.6) pour $(\vec{v}, T) \in \mathcal{F} \times C^\infty(\Omega)$.
2) démonstration de (2.3.6) pour $(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$ par un argument de densité.

On rappelle que

$$\begin{cases} \mathcal{E} \stackrel{def}{=} \{v \in C^\infty(\Omega)\,;\, v|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0\}, \\ \mathcal{F} \stackrel{def}{=} \{\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2,\, (u,v) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}\,;\, div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0\}, \\ H^1_{f,l}(\Omega) \stackrel{def}{=} \{v \in H^1(\Omega)\,;\, v|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0\}, \end{cases}$$

et que $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$.

1) Soit $(\vec{v}, T) \in \mathcal{F} \times C^\infty(\Omega)$. On pose $\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2$. Comme les coordonnées de $\vec{U}(\vec{v})$ sont de classe C^∞, en utilisant

$$\vec{U}(\vec{v})\,.\,\vec{n}\ |_{\partial\Omega} = 0, \quad div_c(\vec{U}(\vec{v})) = 0,$$

on obtient en intégrant par parties,

$$< B_j(\vec{v}), \vec{v} > = \int_\Omega (\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\beta_j(\vec{v}))\,.\,\vec{v}\ .$$

On a d'après (2.3.3) (définition de $\beta_j(\vec{v})$),

$$\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\beta_j(\vec{v}))\,.\,\vec{v} = \int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,u + \int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(v)\,v.$$

On considère le premier terme du deuxième membre de cette égalité. En généralisant la propriété 2) de la fonction de troncature rappelée plus haut et le fait que sur l'ensemble $\{|u| \le j\}$, $\beta_j(u) = u$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,u = \\ \displaystyle\int_{\{|u| \le j\}} \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,u = \int_{\{|u| \le j\}} \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,\beta_j(u). \end{cases}$$

En raisonnant de la même manière, on obtient

$$\int_{\{|u| \le j\}} \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,\beta_j(u) = \int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,\beta_j(u).$$

On a en intégrant de nouveau par parties,

$$\int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,\beta_j(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c (\beta_j(u))^2 = 0 = \int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c \beta_j(u)\,u.$$

De même
$$\int_\Omega \vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c\beta_j(v)\,v = 0,$$
ce qui montre que $< B_j(\vec{v}),\vec{v}> = 0$. Un argument analogue entraine aussi que $< C_j(\vec{v},T),T >= 0$.

2) Soit $(\vec{v},T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$. On considère une suite $(\vec{v}_n,T_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de $\mathcal{F} \times C^\infty(\Omega)$ qui converge fortement dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$ vers $(\vec{v},T)$. D'après ce qui précède, on sait que
$$\forall\, n \in I\!N, \quad < B_j(\vec{v}_n),\vec{v}_n> = 0, \quad < C_j(\vec{v}_n,T_n),T_n >= 0.$$
On montre dans ce qui suit que de la suite $(< B_j(\vec{v}_n),\vec{v}_n>)_{n\in I\!N}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers $< B_j(\vec{v}),\vec{v}>$. On note
$$\vec{v}_n = u_n\,\vec{e}_1 + v_n\,\vec{e}_1, \quad \vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_1\ .$$
On a alors
$$\begin{cases} < B_j(\vec{v}_n),\vec{v}_n> = \\ \displaystyle\int_\Omega \beta_j(u_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c u_n + \int_\Omega \beta_j(v_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c v_n. \end{cases}$$
On utilise le théorème d'injections de Sobolev et le théorème “Lebesgue inverse" (*cf.* BRÉZIS [1]), sachant que les suites $(u_n,v_n)_{n\in I\!N}$ et $(\nabla_c u_n,\nabla_c v_n)_{\in I\!N}$ convergent fortement vers (u,v) et $(\nabla_c u,\nabla_c v)$ respectivement dans $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ et $[L^2(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3$. Des suites $(u_n,v_n)_{n\in I\!N}$ et $(\nabla_c u_n,\nabla_c v_n)_{\in I\!N}$ on peut extraire des sous-suites (notées de la même manière) telles que

— la suite $(u_n,v_n)_{n\in I\!N}$ converge vers (u,v) presque partout dans Ω,

— la suite $(\nabla_c u_n,\nabla_c v_n)_{n\in I\!N}$ converge vers $(\nabla_c u,\nabla_c v)$ p.p dans Ω,

— la suite $(\vec{U}(\vec{v}_n))_{n\in I\!N}$ converge vers $\vec{U}(\vec{v})$ p.p dans Ω.

Le terme $W(\vec{v}_n)$ ne pose pas de difficulté car l'intégrale suivant la verticale régularise les fonctions sur l'axe des z et ne change pas la régularité de type L^2. Donc on peut utiliser le théorème de Lebesgue inverse. De plus,

— il existe trois fonctions dans $L^2(\Omega)$ notées g, h et k et telles que
$$\forall\, n \in I\!N, \quad |\nabla_c u_n| \leq g, \quad |\nabla_c v_n| \leq h, \quad |\vec{U}(\vec{v}_n)| \leq k.$$

La continuité de la fonction β_j permet d'affirmer que les suites $(\beta_j(u_n))_{n\in I\!N}$ et $(\beta_j(v_n))_{n\in I\!N}$ convergent presque partout dans Ω respectivement vers $\beta_j(u)$ et $\beta_j(v)$. Par conséquent,
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}(\beta_j(u_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c u_n, \beta_j(v_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c v_n) = \\ (\beta_j(u)\,\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c u, \beta_j(v)\,\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c v), \end{cases}$$

presque partout dans Ω. Par ailleurs, on dispose des inégalités

$$\begin{cases} |\beta_j(u_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c u_n| \leq j\,g\,k \,\in L^1(\Omega), \\ |\beta_j(v_n)\,\vec{U}(\vec{v}_n)\,.\nabla_c v_n| \leq j\,h\,k \,\in L^1(\Omega), \end{cases}$$

de sorte que le théorème de Lebesgue permet de conclure

$$\begin{cases} 0 = \lim_{n\to\infty} < B_j(\vec{v}_n), \vec{v}_n >= \\ \int_\Omega \beta_j(u)\,\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c u + \int_\Omega \beta_j(v)\,\vec{U}(\vec{v})\,.\nabla_c v \;=< B_j(\vec{v}), \vec{v} >=\; 0. \end{cases}$$

On montre exactement de la même manière que

$$< C_j(\vec{v}, T), T >=\; 0,$$

achevant cette preuve. $\diamondsuit$

LEMME 2.3.3 — *Soit $(\vec{v}_n, T_n)_{n\in I\!N}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega)$ qui converge vers $(\vec{v}, T)$ dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega)$ faible. De cette suite, on peut en extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) telle que pour tout $(\vec{x}, \tau) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega)$,*

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} < B_j(\vec{v}_n), \vec{x} >=< B_j(\vec{v}), \vec{x} >, \\ \lim_{n\to\infty} < C_j(\vec{v}_n, T_n), \tau >=< C_j(\vec{v}, T), \vec{x} >, \end{cases}$$

égalités ayant lieu pour chaque j fixé. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On démontre la première égalité, l'autre procédant de même. Comme $(\vec{v}_n)_{n\in I\!N}$ converge vers $\vec{v}$ dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ faible,

$$\lim_{n\to\infty} \vec{U}(\vec{v}_n) = \vec{U}(\vec{v})$$

dans $L^2(\Omega)$ faible. Quitte à extraire une sous-suite (notée de la même manière), $(\vec{v}_n)_{n\in I\!N}$ converge vers $\vec{v}$ dans $L^2(\Omega)$ fort. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge aussi presque partout. Donc la suite $(\beta_j(\vec{v}_n)\,.\nabla\vec{x})_{n\in I\!N}$ converge vers $\beta_j(\vec{v})\,.\nabla\vec{x}$ p.p. dans Ω et comme

$$\forall\, n \in I\!N, \quad |\beta_j(\vec{v}_n)\,.\nabla\vec{x}\,| \leq j\,|\nabla\vec{x}\,| \in L^2(\Omega),$$

cette convergence est aussi forte dans $L^2(\Omega)$ grâce au théorème de Lebesgue. Le résultat est alors une conséquence de la convergence faible de $(\vec{U}(\vec{v}_n))_{n\in I\!N}$ vers $\vec{U}(\vec{v})$ dans $L^2(\Omega)$. $\diamondsuit$

LEMME 2.3.4 — *Soient*

$$(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega), \quad (\vec{x}, \tau) \in (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \cap [L^\infty(\Omega)]^2) \times (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)).$$

Alors,

$$(2.3.7)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} < B_j(\vec{v}), \vec{x}> = \displaystyle\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v}) . \nabla_c)(\vec{v}) . \vec{x}, \\ \lim\limits_{j\to\infty} < C_j(\vec{v}, T), \tau > = \displaystyle\int_\Omega \tau \, \vec{U}(\vec{v}) . \nabla_c T. \end{cases}$$

En d'autres termes, les opérateurs $B_j(\vec{v})$ et $C_j(\vec{v}, T)$ convergent faiblement vers les opérateurs de transport intervenant dans $(M1)$. ♢

DÉMONSTRATION — On montre la première égalité dans $(2.3.7)$. Soient

$$(\vec{v}, T) \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \times H^1(\Omega), \quad (\vec{x}, \tau) \in (\mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \cap [L^\infty(\Omega)]^2) \times (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)).$$

En raisonnant par densité comme dans la démonstration du lemme 2.3.2, on obtient la formule d'intégration par parties

$$\begin{cases} < B_j(\vec{v}), \vec{x}> = \displaystyle\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v})\nabla_c)(\beta_j(\vec{v})) . \vec{x} = \\ \displaystyle\int_\Omega x \, \vec{U}(\vec{v}) . \nabla_c \beta_j(u) + \int_\Omega y \, \vec{U}(\vec{v}) . \nabla_c \beta_j(v), \end{cases}$$

$\vec{v} = u \, \vec{e}_1 + v \, \vec{e}_2$, $\vec{x} = x \, \vec{e}_1 + y \, \vec{e}_2$. Le résultat est une conséquence de la propriété 2), rappelée dans la section 2.2.2, qui dit que les suites $(\beta_j(u))_{j\in \mathbb{N}}$ et $(\beta_j(v))_{j\in \mathbb{N}}$ convergent vers u et v fortement dans $H^1(\Omega)$ respectivement. La deuxième partie de $(2.3.7)$ se démontre de la même manière. ♢

On dispose maintenant des principales propriétés du transport tronqué.

2.3.5 — SYSTÈME APPROCHÉ

Le système approché $(M2)$ est

$$(M2)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + B_j(\vec{v}) - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(f \, \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s - M(\nabla T)\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_t T + C_j(\vec{v}, T) - \mathcal{K}_{T,h} \Delta T - \mathcal{K}_{T,v} \partial^2_{zz} T = 0, \\ (c) & (\vec{v}, T) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}_{oc}^{1,2}) \times L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega)), \\ (d) & \nu_v \, \partial_z \vec{v} \, |_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \\ (e) & \left(\mathcal{K}_{T,h} \dfrac{\partial T}{\partial \vec{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \dfrac{\partial T}{\partial n_z} \right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \alpha \, (T^\star - T), \\ (f) & (\vec{v}, T)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0). \end{cases}$$

Le système $(M2)$ a la même structure que $(M1)$ du point de vue des multiplicateurs de Lagrange. En revanche, le résultat du lemme 2.3.1 autorise pour $(M2)$ une autre formulation faible.

DÉFINITION 2.3.3 — *On appelle "problème* (Faib2)*" le problème variationnel :*

• *trouver* $(\vec{v}, T) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ *vérifiant* $(\partial_t \vec{v}, \partial_t \tau) \in L^2([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})') \times L^2([0,\mathcal{T}], (H^1(\Omega))')$ *et tel que*

$$\forall\, (\vec{x}, \tau) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega)), \quad \forall\, t \in [0,\mathcal{T}],$$

$$(\mathrm{Faib2}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t < \partial_t \vec{v}, \vec{x} > + \int_0^t < B_j(\vec{v}), \vec{x} > - \int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}.\,\vec{x} \; + \\ \displaystyle\nu_h \int_0^t \int_\Omega \nabla \vec{v} \,.\, \nabla \vec{x} + \nu_v \int_0^t \int_\Omega \partial_z \vec{v} \,.\, \partial_z \vec{x} \; + \\ \displaystyle\frac{1}{Ro} \left(\int_0^t \int_\Omega f\, \vec{k} \times \vec{v} \,.\, \vec{x} - \int_0^t \int_\Omega M(\nabla T) \,.\, \vec{x} \right) = 0, \end{array} \right. \\ (b) & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t < \partial_t T, \tau > + \int_0^t < C_j(\vec{v}, T), \tau > + \\ \displaystyle\mathcal{K}_{T,h} \int_0^t \int_\Omega \nabla T . \nabla \tau \; + \; \mathcal{K}_{T,v} \int_0^t \int_\Omega \partial_z T .\, \partial_z \tau \; - \\ \displaystyle\alpha \int_0^t \int_{\partial\Omega} (T^\star - T)\, \tau = 0, \end{array} \right. \\ (c) & (\vec{v}, T)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0). \end{array} \right.$$

Les crochets intervenant dans $(\mathrm{Faib2}, a)$ *sont ceux de la dualité entre* $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ *et* $(\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'$*, les crochets dans* $(\mathrm{Faib2}, b)$ *sont ceux de la dualité entre* $H^1(\Omega)$ *et* $(H^1(\Omega))'$*.* ♢

Grâce au lemme 2.3.2, le problème $(\mathrm{Faib2})$ a la même structure que les équations de Navier-Stokes traditionnelles, pour lesquelles l'existence d'une solution faible est un fait connu. Dans ce cas, le terme non linéaire (*i.e.* le terme de transport tronqué) est plus régulier que dans les équations de Navier-Stokes (*cf.* le lemme 2.3.1), ce qui justifie la régularité requise pour $\partial_t \vec{v}$ et $\partial_t T$.

Par ailleurs, compte tenu de l'espace des fonctions tests avec lequel on peut travailler dans (Faib2), il est possible de choisir le couple $(\vec{v}, T)$ comme fonction test. En raisonnant comme dans la section 2.1.4, on voit que les solutions de $(\mathrm{Faib2})$ vérifient l'égalité d'énergie $(2.1.1)$. On résume ceci dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.3.1 — *On suppose que*

(i) $(\vec{v}_0, T_0) \in \mathcal{Q}^{0,2}_{oc} \times L^2(\Omega)$*,*
(ii) $\vec{\mathrm{v}} \in [L^2([0,\mathcal{T}], \Gamma_s)]^2$.

Il existe $(\vec{v}, T) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ *solution de* $(\mathrm{Faib2})$*. De plus, toute solution* $(\vec{v}, T)$ *de* $(\mathrm{Faib2})$ *satisfait l'égalité d'énergie* $(2.1.1)$*.* ♢

Ce résultat se démontre par la méthode de compacité développée dans LIONS [1] en utilisant des approximations de Galerkin. On se limite ici à rappeler un plan possible de la démonstration.

(i) En utilisant des projections sur des espaces de dimension finie, on construit une suite de solutions approchées $(\vec{v}_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au problème (Faib2) (approximations de Galerkin en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz).

(ii) En choisissant $(\vec{v}_n, T_n)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on montre que $(\vec{v}_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$.

(iii) On déduit de (ii) et du lemme 2.3.1 que la suite $(\partial_t \vec{v}_n, \partial_t T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})' \times (H^1(\Omega))')$, ce qui combiné à (ii), au lemme 2.1.6 (espaces emboités) et au lemme d'Aubin permet d'affirmer que la suite $(\vec{v}_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $[L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)]^3$.

(iv) On extrait des sous-suites puis on passe à la limite dans les équations en se servant du lemme 2.3.3 pour montrer que les limites des sous-suites sont des solutions de (Faib2). $\diamondsuit$

Le détail des points (ii), (iii) et (iv) est explicité dans les deux paragraphes suivants dans le cadre du problème (Faib1) qui diffère de (Faib2) par les termes de transport.

Remarque 2.3.1 — Les formulations (Faib1) et (Faib2) sont différentes. C'est parce que les termes de transport dans $(M2)$ sont plus réguliers et que l'on a cherché à satisfaire l'égalité d'énergie. On peut cependant à partir de la formulation (Faib2) retrouver une formulation plus voisine de celle de (Faib$'$1). Pour cela, on choisit des tests $(\vec{x}, \tau)$ de la forme

$$\begin{cases} \vec{x}\,(t,M) = \phi(t)\,\vec{y}\,(M), \quad \tau(t,M) = \psi(t)\,\theta(M), \\ (\phi,\psi) \in [L^2([0,\mathcal{T}])]^2, \quad (\vec{y},\theta) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega). \end{cases}$$

On a pour $t \in [0,\mathcal{T}]$ (*cf.* Lions [1])

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t <\partial_t\vec{v}, \vec{x}> = \int_0^t \phi <\partial_t\vec{v}, \vec{y}> = \int_0^t \phi\, \frac{d}{dt}\int_\Omega \vec{v}\,.\,\vec{y}, \\ \displaystyle\int_0^t <\partial_t T, \tau> = \int_0^t \psi <\partial_t T, \theta> = \int_0^t \psi\, \frac{d}{dt}\int_\Omega T\,.\,\theta. \end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t < B_j(\vec{v}), \vec{x}> = \int_0^t \phi < B_j(\vec{v}), \vec{y}>, \\ \displaystyle\int_0^t < C_j(\vec{v},T), \tau> = \int_0^t \psi < C_j(\vec{v},T), \theta>, \\ \displaystyle\int_0^t \int_\Omega \nabla\vec{v}\,.\,\nabla\vec{x} = \int_0^t \phi \int_\Omega \nabla\vec{v}\,.\,\nabla\vec{y}, \quad \int_0^t \int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{x} = \int_0^t \phi \int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{y}, \\ \displaystyle\int_0^t \int_\Omega \nabla T.\nabla\tau = \int_0^t \psi \int_\Omega \nabla T.\nabla\theta, \quad \int_0^t \int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z\tau = \int_0^t \psi \int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z\theta, \end{cases}$$

et enfin,

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^t\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{x}-\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{x}=\\ \displaystyle\int_0^t\phi\left(\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{y}-\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{y}\right),\end{array}\right.\\ \displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{x}=\int_0^t\phi\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{y},\quad\int_0^t\int_{\partial\Omega}(T^\star-T)\,\tau=\int_0^t\psi\int_{\partial\Omega}(T^\star-T)\,\theta.\end{array}\right.$$

Par conséquent, la solution $(\vec{v},T)$ du problème (Faib2) est telle que

$$\forall\,(\vec{y},\theta)\in\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}\times H^1(\Omega),$$

on ait au sens de $L^2([0,\mathcal{T}])$,

$$\text{(Faib3)}\qquad\left\{\begin{array}{ll}(a) & \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{d}{dt}\int_\Omega\vec{v}\,.\,\vec{y}+<B_j(\vec{v}),\vec{y}>+\\ \displaystyle\nu_h\int_\Omega\nabla\vec{v}\,.\nabla\vec{y}+\nu_v\int_\Omega\partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{y}-\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{y}+\\ \displaystyle\frac{1}{Ro}\left(\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{y}-\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{y}\right)=0,\end{array}\right.\\ (b) & \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac{d}{dt}\int_\Omega T\,.\,\theta+<C_j(\vec{v},T),\theta>+\mathcal{K}_{T,h}\int_\Omega\nabla T.\nabla\theta+\\ \displaystyle\mathcal{K}_{T,v}\int_\Omega\partial_z T.\,\partial_z\theta-\alpha\int_{\partial\Omega}(T^\star-T)\,\theta=0,\end{array}\right.\\ (c) & (\vec{v},T)_{t=0}=(\vec{v}_0,T_0).\end{array}\right.$$

Ce qui précède montre que (Faib2) implique (Faib3). On montre de même que (Faib3) implique (Faib2) qui sont donc équivalents. $\diamondsuit$

REMARQUE 2.3.2 — Soit $(\vec{v},T)$ une solution du problème (Faib2). En raisonnant comme dans la section 2.1.5 tout en tenant compte de la régularité des termes dans le problème (Faib2), on note qu'il existe $p_s\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}],L^2(\Gamma_s))$ telle que $(\vec{v},T,p_s)$ soit une solution du système $(M2)$ au sens des distributions. $\diamondsuit$

REMARQUE 2.3.3 — Il se pose la question de l'unicité de la solution du problème (Faib2) pour j fixé. On peut montrer qu'il existe C_j qui dépend de j et qui tend vers l'infini quand j tend vers l'infini telle que lorsque $Inf(\nu_h,\nu_v,\mathcal{K}_{T,h},\mathcal{K}_{T,v})>C_j$, la solution du problème (Faib2) est unique. $\diamondsuit$

On dispose maintenant d'un système approché pour les équations primitives. On note $(\vec{v}_j,T_j)$ une solution de (Faib2) pour j donné. Il se pose le problème de savoir si cette suite converge (à une suite extraite près) vers une solution de (Faib1).

Dans les deux paragraphes suivants, on étudie la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lorque j tend vers l'infini. On commence par les estimations a priori puis on passe à la limite dans les équations. D'ici la fin du paragraphe 2.5, on aura montré que de cette suite, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega))$ vers une limite $(\vec{v}, T)$ solution du problème $(\mathrm{Faib1})$.

2. 4 — ESTIMATIONS A PRIORI

2.4.1 — ORIENTATION

On détaille dans ce paragraphe l'obtention des estimations a priori nécessaires à l'étude de la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$. On cherche des espaces dans lesquels cette suite est relativement fortement compacte en appliquant le lemme d'Aubin. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir estimer les dérivées par rapport au temps. Donc,

- on cherche une borne pour la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega))$ et dans l'espace $L^\infty([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^3)$,
- on cherche une borne pour la suite $(\partial_t\vec{v}_j, \partial_t T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})' \times (W^{2,2}(\Omega))')$.

2.4.2 — ESTIMATIONS D'ÉNERGIE

On suppose dans tout ce qui suit que les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2.2.1 ont lieu, c'est-à-dire,

$$\text{(2.4.1)} \qquad \vec{\mathrm{v}} \in [L^2([0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s)]^2, \quad (\vec{v}_0, T_0) \in \mathcal{Q}^{0,2}_{oc} \times L^2(\Omega).$$

Par ailleurs, on pose

$$\text{(2.4.2)} \qquad \nu = Inf(\nu_h, \nu_v, \mathcal{K}_{T,h}, \mathcal{K}_{T,v}) > 0.$$

D'après le théorème 2.2.1, le couple $(\vec{v}_j, T_j)$ satisfait l'égalité d'énergie

$$\text{(2.4.3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\vec{v}_j|^2 - \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\vec{v}_0|^2 + \nu_h \int_0^t \int_\Omega |\nabla \vec{v}_j|^2 + \\ \nu_v \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |\partial_z \vec{v}_j|^2 - \int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \,.\, \vec{v}_j - \\ \dfrac{1}{Ro}\displaystyle\int_0^t \int_\Omega M(\nabla T_j) \,.\, \vec{v}_j = 0, \end{array} \right. \\ (b) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |T_j|^2 - \dfrac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \mathcal{K}_{T,h} \int_0^t \int_\Omega |\nabla T_j|^2 + \\ \mathcal{K}_{T,v} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |\partial_z T_j|^2 - \alpha \int_0^t \int_\Gamma (T^\star - T_j) \,.\, T_j = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

LEMME 2.4.1 — *Il existe une constante*

$$C = C(\Omega, ||\overrightarrow{\mathrm{v}}||_{[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s)]^2}, ||\overrightarrow{v}_0||_{[L^2(\Omega)]^2}, ||T_0||_{L^2(\Omega)}, T^\star, \alpha, \mathcal{T}, Ro, \nu)$$

et telle que pour tout $j \geq 1$ on ait

$$\left\{\begin{array}{ll} ||\overrightarrow{v}_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],[L^2(\Omega)]^2)} \leq C, & ||T_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^2(\Omega))} \leq C, \\ ||\overrightarrow{v}_j||_{L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})} \leq C, & ||T_j||_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))} \leq C. \end{array}\right. \tag{2.4.4}$$

En d'autres termes, la suite $(\overrightarrow{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0,\mathcal{T}],[L^2(\Omega)]^2)$ et dans $L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})$, la suite $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0,\mathcal{T}],L^2(\Omega))$ et dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))$. ♢

DÉMONSTRATION — On note d'abord que $\overrightarrow{v}_j$ n'intervient pas dans l'égalité d'énergie pour T_j $(2.4.3, b)$ et ce, car le transport tronqué ne travaille pas (*cf.* lemme 2.3.2). C'est pourquoi, on traite d'abord T_j, puis ensuite $\overrightarrow{v}_j$.

• *Estimation de la température.* Soit $t \in [0,\mathcal{T}]$. Comme $\alpha > 0$, l'égalité $(2.4.3, b)$ entraine l'inégalité

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |T_j|^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \alpha\, T^\star \int_0^t\int_{\partial\Omega} |T_j|. \tag{2.4.5}$$

L'inégalité de Sobolev, l'inégalité de traces (*cf.* LIONS-MAGENES ÃĐ[1]) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent l'existence d'une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω et telle que

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega} |T_j| \leq C\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 + \int_0^t\int_\Omega T_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.6}$$

On pose

$$\varepsilon = Inf(\nu, \frac{1}{2\mathcal{T}}).$$

En utilisant l'inégalité de Young,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\, T^\star C\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 + \int_0^t\int_\Omega T_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 + \int_0^t\int_\Omega T_j^2\right) + \frac{(\alpha\, T^\star C)^2\mathcal{T}}{2\,\varepsilon}. \end{array}\right. \tag{2.4.7}$$

En combinant les inégalités (2.4.5), (2.4.6) et (2.4.7), on a pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_\Omega |T_j|^2 + (\nu - \frac{\varepsilon}{2})\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 \leq \\ \frac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \frac{(\alpha\, T^\star C)^2\mathcal{T}}{2\,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\int_\Omega |T_j|^2. \end{array}\right. \tag{2.4.8}$$

Étant donné $\tau \in]0, \mathcal{T}]$, on intègre l'inégalité $(2.4.8)$ par rapport au temps sur l'intervalle $[0, \tau]$. Il vient

$$(2.4.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\tau \int_\Omega |T_j|^2 + (\nu - \frac{\varepsilon}{2})\int_0^\tau \int_0^t \int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 \leq \\ \dfrac{\mathcal{T}}{2}\displaystyle\int_\Omega |T_0|^2 + \frac{(\alpha\, T^\star C\mathcal{T})^2}{2\,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\tau \int_0^t \int_\Omega |T_j|^2. \end{cases}$$

Une intégration par parties par rapport au temps montre que

$$\int_0^\tau \int_0^t \int_\Omega |T_j|^2 = \int_0^\tau (\tau - t)\int_\Omega |T_j|^2 \leq \int_0^\tau (\mathcal{T} - t)\int_\Omega |T_j|^2,$$

ce que l'on reporte dans l'inégalité $(2.4.9)$. Il vient

$$(2.4.10)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\tau \int_\Omega (1 - \varepsilon(\mathcal{T} - t))\,|T_j|^2 + (\nu - \frac{\varepsilon}{2})\int_0^\tau \int_0^t \int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 \leq \\ \dfrac{\mathcal{T}}{2}\displaystyle\int_\Omega |T_0|^2 + \frac{(\alpha\, T^\star C\mathcal{T})^2}{2\,\varepsilon} \overset{def}{=} \frac{C_1}{4}. \end{cases}$$

Puisque $\varepsilon = Inf(\nu, 1/2\mathcal{T})$, on a

$$(1 - \varepsilon(\mathcal{T} - t)) \geq \frac{1}{2}, \quad (\nu - \frac{\varepsilon}{2}) \geq \frac{\nu}{2}.$$

On déduit alors de $(2.4.10)$ que pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$(2.4.11)\qquad \int_0^t \int_\Omega T_j^2 \leq C_1.$$

On reporte l'estimation $(2.4.11)$ dans l'estimation $(2.4.8)$,

$$(2.4.12)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |T_j|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c T_j|^2 \leq \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |T_0|^2 + \frac{(\alpha\, T^\star C)^2\mathcal{T}}{2\,\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}C_1 \overset{def}{=} C_2, \end{cases}$$

ce qui montre que la suite $(T_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans $L^\infty([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$ et dans $L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega))$.

• *Estimation de la vitesse*. En utilisant l'égalité d'énergie satisfaite par $\vec{v}$, $(2.4.3, a)$, on a

$$(2.4.13)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\,\vec{v}_j\,|^2 + \nu\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \vec{v}_j\,|^2 \leq \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\,\vec{v}_0\,|^2 + \int_0^t \int_{\Gamma_s} |\,\vec{\mathrm{v}}\,|\,.\,|\,\vec{v}_j\,| + \frac{1}{Ro}\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)\,|\,.\,|\,\vec{v}_j\,|. \end{cases}$$

On traite les deux derniers termes du second membre de cette inégalité l'un après l'autre. En raisonnant comme plus haut, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de traces, l'existence d'une constante $C > 0$ qui ne dépend que de Ω et telle que

$$\int_0^t \int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}| \,.\, |\overrightarrow{v}_j| \leq C \int_0^t \left(\int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4.14}$$

L'inégalité de Young implique

$$\int_0^t \left(\int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\nu} \int_0^t \int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}|^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2,$$

que l'on reporte dans $(2.4.14)$ pour obtenir

$$\int_0^t \int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}| \,.\, |\overrightarrow{v}_j| \leq \frac{C^2}{\nu} \int_0^t \int_{\Gamma_s} |\overrightarrow{\mathrm{v}}|^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2. \tag{2.4.15}$$

On majore le dernier terme du deuxième membre de l'inégalité $(2.4.13)$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré (en notant toujours C_p la constante de Poincaré),

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Ro} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)| \,.\, |\overrightarrow{v}_j| \leq \\ \dfrac{C_p}{Ro} \displaystyle\int_0^t \left(\int_\Omega |M(\nabla T_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{2.4.16}$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Young, on écrit

$$\begin{cases} \dfrac{C_p}{Ro} \displaystyle\int_0^t \left(\int_\Omega |M(\nabla T_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \dfrac{C_p^2}{Ro^2 \nu} \displaystyle\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)|^2 + \frac{\nu}{4} \int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \overrightarrow{v}_j|^2. \end{cases} \tag{2.4.17}$$

Il faut maintenant estimer

$$\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)|^2.$$

Pour cela, nous avons besoin du lemme intermédiaire 2.4.2 qui sert également dans le chapitre 6 et dans l'appendice A.

LEMME 2.4.2 — *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors, $M(f) \in L^2(\Omega)$ et*

$$||M(f)||_{L^2(\Omega)} \leq C_H ||f||_{L^2(\Omega)}, \tag{2.4.18}$$

où C_H est définie par

$$C_H \stackrel{def}{=} \sup_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x,y). \tag{2.4.19}$$ $\diamondsuit$

On termine d'abord la preuve du lemme 2.4.1 avant de montrer le lemme 2.4.2. D'après l'estimation (2.4.18) combinée à la borne sur le module des gradients de T_j (2.4.12), on a

$$\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)|^2 \leq \frac{C_H^2\, C_2}{2\nu}$$

qui reportée dans (2.4.17) combinée à (2.4.16) conduit à

$$\frac{1}{Ro}\int_0^t \int_\Omega |M(\nabla T_j)|\,.\,|\vec{v}_j| \leq \frac{C_H^2\, C_2\, C_p^2}{2Ro^2\nu^2} + \frac{\nu}{4}\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \vec{v}_j|^2. \tag{2.4.20}$$

En combinant (2.4.13), (2.4.15) et (2.4.20) on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\vec{v}_j|^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \vec{v}_j|^2 \leq \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\vec{v}_0|^2 + \frac{C^2}{\nu}\int_0^t \int_{\Gamma_s} |\mathrm{v}|^2 + \frac{C_H^2\, C_2\, C_p^2}{2Ro^2\nu^2}, \end{cases} \tag{2.4.21}$$

une inégalité valable pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$. Ceci montre que la suite $(\vec{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0,\mathcal{T}],[L^2(\Omega)]^2)$ et dans $L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})$, achevant la démonstration du lemme 2.4.1. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION du lemme 2.4.2 — Soit $f \in L^2(\Omega)$. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\int_\Omega |M(f)|^2 = \int_{\Gamma_s}\left(\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 f\,dz'\right)^2 dz\right) dxdy.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 f\,dz'\right)^2 dz \leq \int_{-H(x,y)}^0 |z| \left(\int_z^0 f^2 dz'\right) dz.$$

On en déduit

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |M(f)|^2 \leq C_H \int_{\Gamma_s}\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 f^2 dz'\right) dz\,dxdy \leq \\ \displaystyle C_H^2 \int_{\Gamma_s}\int_{-H(x,y)}^0 f^2\,dz\,dxdy = C_H^2 \int_\Omega f^2, \end{cases}$$

ce qui achève la preuve de ce lemme. $\diamondsuit$

REMARQUE 2.4.1 — On obtient en fait à l'aide de l'inégalité $(2.4.21)$ un résultat plus fort que celui annoncé dans le lemme 2.4.1. On a montré

$$\forall\, t \in]0, \mathcal{T}], \qquad \int_\Omega |\, \overrightarrow{v}_j\,(t, M)\,|^2\, dM \leq C. \qquad \diamondsuit$$

REMARQUE 2.4.2 — On retrouve des estimations analogues à celles du lemme 2.4.1 lorsque l'on remplace la condition aux limites

$$\left(\mathcal{K}_{T,h} \frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \frac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \alpha\,(T^\star - T)$$

par la condition plus "physique"

$$\left(\mathcal{K}_{T,h} \frac{\partial T}{\partial \overrightarrow{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v} \frac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \chi_{\{T\geq 0\}}\, P(T),$$

où P est un polynôme en T tel que

$$\lim_{T\to\infty} P(T) \,=\, -\infty,$$

et où χ_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A. $\diamondsuit$

2.4.3 — ESTIMATION DES DÉRIVÉES PAR RAPPORT AU TEMPS

Le but de cette section est d'estimer la suite $(\partial_t \overrightarrow{v}_j, \partial_t T_j)_{j\in I\!N}$, étape nécessaire à la compacité de $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in I\!N}$ dans un espace pivot. Les estimations obtenues dépendent bien sûr des termes de transport tronqués. Leurs normes sont dans des espaces de type "H^{-1}" mais la borne dépend de j, ce qui est la source d'une difficulté (*cf.* la preuve du lemme 2.3.1). C'est pourquoi on travaille dans les espaces $(\mathcal{Q}^{2;2}_{oc})'$ (pour la vitesse) et $(W^{2,2}(\Omega))'$ (pour la température) où l'on obtient des estimations indépendantes de j pour les termes de transport et donc, en utilisant les résultats de la section précédente, pour les dérivées par rapport au temps.

LEMME 2.4.3 — *Il existe une constante*

$$C = C(\Omega, ||\overrightarrow{\mathrm{v}}||_{[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s)]^2}, ||\,\overrightarrow{v}_0\,||_{[L^2(\Omega)]^2}, ||T_0||_{L^2(\Omega)}, T^\star, \alpha, \mathcal{T}, Ro, \nu)$$

et telle que pour tout $j \geq 1$ *on ait*

$$||\partial_t \overrightarrow{v}_j\,||_{L^1([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2;2}_{oc})')} \leq C, \quad ||\partial_t T_j||_{L^1([0,\mathcal{T}],(W^{2,2}(\Omega))')} \leq C. \tag{2.4.22}$$

En d'autres termes, la suite $(\partial_t \overrightarrow{v}_j)_{j\in I\!N}$ *est bornée dans* $L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2;2}_{oc})')$ *et la suite* $(\partial_t T_j)_{j\in I\!N}$ *est bornée dans* $L^1([0,\mathcal{T}], (W^{2,2}(\Omega))')$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — En utilisant un cas particulier de la formulation (Faib3) (équivalente à (Faib2)) dans la remarque 2.3.1, on peut écrire pour tout $(\vec{x}, \tau) \in \mathcal{Q}_{oc}^{2,2} \times W^{2,2}(\Omega)$ en $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$
(2.4.23) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} < \partial_t \vec{v}_j, \vec{x} > = - < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > - \\ \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla \vec{v}_j \,.\, \nabla \vec{x} - \nu_v \int_\Omega \partial_z \vec{v}_j \,.\, \partial_z \vec{x} + \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \,.\, \vec{x} - \\ \dfrac{1}{Ro} \left(\displaystyle\int_\Omega f \, \vec{k} \times \vec{v}_j \,.\, \vec{x} - \int_\Omega M(\nabla T_j) \,.\, \vec{x} \right), \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} < \partial_t T_j, \tau > = - < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > - \\ \mathcal{K}_{T,h} \displaystyle\int_\Omega \nabla T_j . \nabla \tau \; - \; \mathcal{K}_{T,v} \int_\Omega \partial_z T_j . \, \partial_z \tau + \\ \alpha \displaystyle\int_{\partial\Omega} (T^\star - T_j) \, \tau. \end{cases} \end{cases}
$$

On estime les termes dans les membres de droite des égalités de (2.4.23) les uns après les autres. Dans toute cette démonstration, C désigne une constante en général qui ne dépend que des données du problème et non de j.

Termes de transports. On rappelle que

$$
\begin{cases} < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > = \displaystyle\int_\Omega (\vec{U}(\vec{v}_j) \,.\nabla_c) \, (\beta_j(\vec{v}_j)) \,.\, \vec{x}, \\ < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > = \displaystyle\int_\Omega \tau \, \vec{U}(\vec{v}_j) \,.\nabla_c \beta_j(T_j). \end{cases}
$$

On en déduit

$$
\begin{cases} | < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > | \; \leq \; ||\vec{U}(\vec{v}_j)||_{[L^2(\Omega)]^3} ||\beta_j(\vec{v}_j)||_{[H^1(\Omega)]^2} || \vec{x} \,||_{[L^\infty(\Omega)]^2}, \\ | < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > | \; \leq \; ||\vec{U}(\vec{v}_j)||_{[L^2(\Omega)]^3} ||\beta_j(T_j)||_{H^1(\Omega)} ||\tau||_{L^\infty(\Omega)}. \end{cases}
$$

Par ailleurs on sait grâce au théorème d'injections de Sobolev (on est en dimension 3) que

$$
|| \vec{x} \,||_{[L^\infty(\Omega)]^2} \leq C \, || \vec{x} \,||_{\mathcal{Q}_{oc}^{2,2}}, \quad ||\tau||_{L^\infty(\Omega)} \leq C ||\tau||_{W^{2,2}(\Omega)}.
$$

On rappelle que

$$
\vec{U}(\vec{v}_j) = \vec{v}_j + \left(\int_z^0 div \vec{v}_j \right) \vec{k} \; .
$$

Par conséquent, en appliquant le lemme 2.4.2 et la propriété 2) de la fonction de troncature (*cf.* la section 2.3.2) on a

$$
\begin{cases} ||\vec{U}(\vec{v}_j)||_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C || \, \vec{v}_j \, ||_{\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}}, \\ ||\beta_j(\vec{v}_j)||_{[H^1(\Omega)]^2} \leq C || \, \vec{v}_j \, ||_{\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}}, \quad ||\beta_j(T_j)||_{H^1(\Omega)} \leq ||T_j||_{H^1(\Omega)}. \end{cases}
$$

On en déduit que

$$(2.4.24)\qquad \begin{cases} | < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > | \leq C|| \vec{v}_j ||^2_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} || \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}, \\ | < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > | \leq C|| \vec{v}_j ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} ||T_j||_{H^1(\Omega)} ||\tau||_{W^{2,2}(\Omega)}. \end{cases}$$

Cela montre en particulier que pour chaque $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$\begin{cases} ||B_j(\vec{v}_j)||_{(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})'} \leq C|| \vec{v}_j ||^2_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}, \\ ||C_j(\vec{v}_j, T_j)||_{(W^{2,2}(\Omega))'} \leq C|| \vec{v}_j ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} ||T_j||_{H^1(\Omega)}. \end{cases}$$

En utilisant les estimations (2.4.4) du lemme 2.4.1 concernant la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j \in I\!N}$, on a

$$(2.4.25)\quad ||B_j(\vec{v}_j)||_{L^1([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})')} \leq C, \quad ||C_j(\vec{v}_j, T_j)||_{L^1([0,\mathcal{T}],(W^{2,2}(\Omega))')} \leq C.$$

Termes de diffusion. On note en premier lieu que pour chaque $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$\left| \nu_h \int_\Omega \nabla \vec{v}_j \, . \, \nabla \vec{x} + \nu_v \int_\Omega \partial_z \vec{v}_j \, . \, \partial_z \vec{x} \right| \leq sup(\nu_h, \nu_v) \, || \vec{v}_j ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} || \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}.$$

Or

$$|| \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} \leq C \, || \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}.$$

Par conséquent,

$$(2.4.26)\qquad \begin{cases} \left| \nu_h \int_\Omega \nabla \vec{v}_j \, . \, \nabla \vec{x} + \nu_v \int_\Omega \partial_z \vec{v}_j \, . \, \partial_z \vec{x} \right| \leq \\ sup(\nu_h, \nu_v) \, || \vec{v}_j ||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}} || \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}. \end{cases}$$

Un raisonnement analogue montre que

$$(2.4.27)\quad \left| \mathcal{K}_{T,h} \int_\Omega \nabla T_j . \nabla \tau \, + \, \mathcal{K}_{T,v} \int_\Omega \partial_z T_j . \, \partial_z \tau \right| \leq C \, ||T_j||_{H^1(\Omega)} ||\tau||_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Il reste à traiter les termes de bord. D'après le théorème de traces,

$$(2.4.28)\qquad \left| \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \, . \, \vec{x} \right| \leq C \, || \vec{\mathrm{v}} ||_{L^2([0,\mathcal{T}],[L^2(\Gamma_s)]^2)} || \vec{x} ||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}.$$

Toujours à l'aide du même théorème de traces,

$$(2.4.29)\qquad \left| \alpha \int_{\partial\Omega} (T^\star - T_j) \, \tau \right| \leq C \, \left(1 + ||T_j||_{H^1(\Omega)} \right) \, ||\tau||_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Force de Coriolis et termes des forces de pression. On a

$$(2.4.30)\quad \left|\int_\Omega f\ \vec{k}\times\vec{v}_j\,.\,\vec{x}\right| \le |f|\,||\vec{v}_j||_{L^2(\Omega)}||\vec{x}||_{L^2(\Omega)} \le C||\vec{v}_j||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}||\vec{x}||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}.$$

Enfin, en utilisant le lemme 2.4.2, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Sobolev, il vient

$$(2.4.31)\quad \left|\int_\Omega M(\nabla T_j)\,.\,\vec{x}\right| \le C\,||T_j||_{H^1(\Omega)}||\vec{x}||_{\mathcal{Q}^{2,2}_{oc}}.$$

Conclusion. Lorsque l'on combine $(2.4.23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31)$, on note que pour chaque $t\in\mathcal{T}$ et chaque j, $\partial_t\vec{v}_j\in(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})'$ et $\partial_t T_j\in(W^{2,2}(\Omega))'$. De plus,

$$(2.4.32)\quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} ||\partial_t\vec{v}_j\,||_{(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})'} \le C||\vec{v}_j||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}}(1+||\vec{v}_j||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}})+ \\ C\,||\vec{\mathrm{v}}\,||_{L^2([0,\mathcal{T}],[L^2(\Gamma_s)]^2)}+C\,||T_j||_{H^1(\Omega)}, \end{cases} \\ (b) & ||\partial_t T_j||_{(W^{2,2}(\Omega))'} \le C||T_j||_{H^1(\Omega)}(1+||\vec{v}_j||_{\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}})+C. \end{cases}$$

On déduit des inégalités dans $(2.4.32)$ et des estimations $(2.4.4)$ du lemme 2.4.1 portant sur la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, qu'il existe une constante C qui ne dépend pas de j et telle que l'on ait

$$||\partial_t\vec{v}_j\,||_{L^1([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})')} \le C,\quad ||\partial_t T_j||_{L^1([0,\mathcal{T}],(W^{2,2}(\Omega))')} \le C,$$

ce qui montre que la suite $(\partial_t\,\vec{v}_j, \partial_t T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})')\times L^1([0,\mathcal{T}],(W^{2,2}(\Omega))')$, achevant cette démonstration. $\diamondsuit$

On dispose maintenant des estimations nécessaires au passage à la limite dans les équations.

2. 5 — PASSAGE À LA LIMITE DANS LES ÉQUATIONS

2.5.1 — ORIENTATION

Ce paragraphe a pour but de montrer qu'une suite extraite de $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème (Faib1) et d'achever entièrement la preuve du théorème 2.2.1. Les hypothèses sont toujours celles du théorème 2.2.1, *i.e.* $\vec{\mathrm{v}}\in[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s)]^2$, $(\vec{v}_0, T_0)\in\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}\times L^2(\Omega)$. On décrit d'abord le processus d'extraction de sous-suites avant de passer à la limite dans les équations.

2.5.2 — EXTRACTIONS DE SOUS-SUITES

PROPOSITION 2.5.1 — *Il existe*

$$(\vec{v}, T)\in L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})\times L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega)) \stackrel{def}{=} E$$

tel que de la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite vérifiant

- *i)* $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\overrightarrow{v}, T)$ *dans*
$$L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$$
faible,
- *ii)* $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\overrightarrow{v}, T)$ *dans* $L^2([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^3)$ *fort,*
- *iii)* $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\overrightarrow{v}, T)$ *presque partout dans* $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$*,*
- *iv) pour presque tout* $t \in [0,\mathcal{T}]$*, la suite* $(\overrightarrow{v}_j(t,.), T_j(t,.))_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\overrightarrow{v}(t,.), T(t,.))$ *dans* $[L^2(\Omega)]^3$ *faible et* $[L^r(\Omega)]^3$ *fort pour tout* $r \in [1,2[$*,*
- *v)* $(\overrightarrow{U}(\overrightarrow{v}_j))_{j\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\overrightarrow{U}(\overrightarrow{v})$ *dans* $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ *faible.* ♢

DÉMONSTRATION — D'après le lemme 2.4.1, on sait que la suite $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace E qui est réflexif. Cette suite est donc faiblement relativement compacte dans E et il existe $(\overrightarrow{v}, T) \in E$, tel que de la suite $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite, notée de la même manière, faiblement convergente vers $(\overrightarrow{v}, T)$, ce qui assure le point *i)*. Le point *v)* en est une conséquence immédiate.

On montre les points *ii)* et *iii)* simultanément et en deux étapes.

1) On montre que la suite $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est fortement compacte dans $L^1([0,\mathcal{T}], [L^1(\Omega)]^3)$.
2) On déduit *ii)* d'un argument d'interpolation.

1) On a
$$H^1(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset (W^{2,2}(\Omega))',$$
ces espaces sont denses les uns dans les autres et les injections continues. Par ailleurs, le théorème d'injections de Sobolev montre que la première est compacte. En appliquant le lemme 2.1.7 (espaces emboités), on a alors les injections continues
$$F \stackrel{def}{=} \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega) \subset \mathcal{Q}^{0,1}_{oc} \times L^1(\Omega) \subset (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})' \times (W^{2,2}(\Omega))' \stackrel{def}{=} G,$$
la première est compacte. Comme $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], F)$ et que $(\partial_t\overrightarrow{v}_j, \partial_t T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}], G)$ (*cf.* lemme 2.4.3), on déduit du lemme d'Aubin (*cf.* lemme 2.1.5) que $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est fortement relativement compacte dans $L^1([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{0,1}_{oc} \times L^1(\Omega))$ et en particulier dans $[L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$. On peut donc en extraire une sous-suite fortement convergente dans cet espace. L'unicité de la limite assure que la seule limite possible est dans ce cas $(\overrightarrow{v}, T)$.
Enfin, le théorème de Lebesgue inverse permet d'affirmer que de $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente vers $(\overrightarrow{v}, T)$ presque partout dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$, ce qui conclut le point *iii)*.

2) D'après le théorème d'injections de Sobolev, on déduit du fait que $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans E qu'elle est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], [L^6(\Omega)]^3)$. Par ailleurs, on sait d'après le lemme 2.4.1 que $(\overrightarrow{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^3)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on peut affirmer que cette suite est bornée dans
$$L^{\frac{2}{1-\theta}}([0,\mathcal{T}], [L^{\frac{6}{1+3\theta}}]^3)$$

pour tout $\theta \in]0,1[$ (voir aussi les détails d'un résultat similaire dans le lemme 4.2.3 plus loin). En prenant $\theta = 1/2$, on observe que $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^4([0,\mathcal{T}],[L^3(\Omega)]^3)$ et en particulier dans $[L^3([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$. La convergence presque partout de la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et le théorème d'Égorov (*cf.* OXTOBY [1]) combinés à l'inégalité de Hölder, montrent que $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est fortement compacte dans $[L^r([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ pour tout $r \in [1,3[$. Le point *ii)* est montré avec $r = 2$.

On termine cette démonstration par le point *iv)*. La convergence presque partout de la suite $(\vec{v}_j, T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dit qu'il existe $A \subset [0,\mathcal{T}]$ et $B \subset \Omega$ tous les deux de mesure nulle et tels que

$$\begin{cases} \forall\,(t,M) \in ([0,\mathcal{T}]\setminus A)\times(\Omega\setminus B), \\ \lim\limits_{j\to\infty}(\vec{v}_j\ (t,M), T_j(t,M)) = (\vec{v}\ (t,M), T(t,M)). \end{cases}$$

Soit $t \in [0,\mathcal{T}]\setminus A$. On sait que la suite $(\vec{v}_j\ (t,.), T_j(t,.))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ (*cf.* la remarque 2.4.1 et le lemme 2.4.1). Ce qui précède montre qu'elle converge presque partout dans Ω vers $(\vec{v}\ (t,.), T(t,.))$. Donc toujours à l'aide du théorème d'Égorov combiné à l'inégalité de Hölder, on en déduit que la suite $(\vec{v}_j\ (t,.), T_j(t,.))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\vec{v}\ (t,.), T(t,.))$ dans $L^r(\Omega)$ fort pour tout $r \in [1,2[$ car la convergence faible dans $L^2(\Omega)$ de cette suite est d'ors et déjà acquise, ce qui montre le point *iv)*. $\diamondsuit$

2.5.3 — PASSAGE À LA LIMITE ET CONCLUSION

On termine la démonstration du théorème d'existence 2.2.1 en prouvant simultanément que

— $(\vec{v}, T)$ est une solution du problème (Faib1),

— $(\partial_t\vec{v}, \partial_t T) \in L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})' \times (W^{2,2}(\Omega))')$.

Soient $(\vec{x}, \tau) \in C^\infty([0,\mathcal{T}],\mathcal{F}) \times C^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ et $t \in [0,\mathcal{T}]\setminus A$ où A est un ensemble de mesure nulle en dehors duquel le point *iv)* de la proposition 2.5.1 est satisfait. Pour chaque j on a

$$
(\mathrm{Faib2},j)\qquad
\begin{cases}
(a) & \begin{cases}
\displaystyle\int_0^t < \partial_t \vec{v}_j, \vec{x} > + \int_0^t < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > + \\
\displaystyle\nu_h \int_0^t \int_\Omega \nabla \vec{v}_j \,.\, \nabla \vec{x} + \nu_v \int_0^t \int_\Omega \partial_z \vec{v}_j \,.\, \partial_z \vec{x} \; - \\
\displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \,.\, \vec{x} + \frac{1}{Ro}\left(\int_0^t \int_\Omega f\, \vec{k} \times \vec{v}_j \,.\, \vec{x} \; - \right. \\
\displaystyle\left. \int_0^t \int_\Omega M(\nabla T_j) \,.\, \vec{x} \right) = 0,
\end{cases} \\
(b) & \begin{cases}
\displaystyle\int_0^t < \partial_t T_j, \tau > + \int_0^t < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > + \\
\displaystyle\mathcal{K}_{T,h} \int_0^t \int_\Omega \nabla T_j . \nabla \tau \; + \; \mathcal{K}_{T,v} \int_0^t \int_\Omega \partial_z T_j . \, \partial_z \tau \, - \\
\displaystyle\alpha \int_0^t \int_{\partial\Omega} (T^\star - T_j)\, \tau = 0,
\end{cases} \\
(c) & (\vec{v}_j, T_j)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0).
\end{cases}
$$

Par ailleurs, pour j fixé, $(\vec{v}_j, T_j) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega))$ tandis que l'on a $(\partial_t \, \vec{v}_j, \partial_t T_j) \in L^2([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})' \times (H^1(\Omega))')$. Donc quitte à changer $(\vec{v}_j, T_j)$ sur un sous-ensemble de $[0,\mathcal{T}]$ de mesure nulle, $(\vec{v}_j, T_j) \in C([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^3)$ (*cf.* LIONS-MAGENES [1]). Par conséquent, on peut écrire

$$
(2.5.1.a)\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^t < \partial_t \vec{v}_j, \vec{x} > = \int_\Omega \vec{v}_j\,(t,M) \,.\, \vec{x}\,(t,M)\, dM \, - \\
\displaystyle\int_\Omega \vec{v}_0 \,.\, \vec{x}\,(0,M)\, dM - \int_0^t \int_\Omega \vec{v}_j \,.\, \partial_t \vec{x},
\end{cases}
$$

$$
(2.5.1.b)\qquad
\begin{cases}
\displaystyle\int_0^t < \partial_t T_j, \tau > = \int_\Omega T_j(t,M) \,.\, \tau(t,M)\, dM \\
\displaystyle - \int_\Omega T_0 \,.\, \tau(0,M)\, dM \, - \int_0^t \int_\Omega T_j \,.\, \partial_t \tau.
\end{cases}
$$

On passe à la limite dans les termes de $(\mathrm{Faib2}, j)$ les uns après les autres.

Termes d'évolution. Le point *ii)* de la proposition 2.5.1 permet d'affirmer que

$$
\lim_{j\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \vec{v}_j \,.\, \partial_t \vec{x} = \int_0^t \int_\Omega \vec{v} \,.\, \partial_t \vec{x}, \quad \lim_{j\to\infty} \int_0^t \int_\Omega T_j \,.\, \partial_t \tau = \int_0^t \int_\Omega T \,.\, \partial_t \tau.
$$

Par ailleurs, compte tenu du choix de t et du point *iv)* de la proposition 2.5.1,

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega \vec{v}_j\,(t,M)\,.\,\vec{x}\,(t,M)\,dM = \int_\Omega \vec{v}\,(t,M)\,.\,\vec{x}\,(t,M)\,dM \\ \lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega T_j(t,M)\,.\,\tau(t,M)\,dM = \int_\Omega T(t,M)\,.\,\tau(t,M)\,dM. \end{cases}$$

Par conséquent grâce à $(2.5.1)$ on a

$$(2.5.2) \qquad \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \int_0^t < \partial_t \vec{v}_j, \vec{x} >= \int_\Omega \vec{v}\,(t,M)\,.\,\vec{x}\,(t,M)\,dM - \\ \int_\Omega \vec{v}_0\,.\,\vec{x}\,(0,M)\,dM - \int_0^t \int_\Omega \vec{v}\,.\,\partial_t\vec{x}, \end{cases} \\ \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \int_0^t < \partial_t T_j, \tau >= \int_\Omega T(t,M)\,.\,\tau(t,M)\,dM - \\ \int_\Omega T_0.\,\tau(0,M)\,dM \; - \int_0^t \int_\Omega T.\,\partial_t\tau. \end{cases} \end{cases}$$

Termes de transports. On rappelle que d'après la définition 2.3.4, on a

$$\begin{cases} < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > = -\int_\Omega (\vec{U}\,(\vec{v}_j)\,.\nabla_c)\,(\vec{x})\,.\,\beta_j(\vec{v}_j), \\ < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > = -\int_\Omega \beta_j(T_j)\,\vec{U}\,(\vec{v}_j)\,.\nabla_c\tau. \end{cases}$$

Le point *ii)* de la proposition 2.5.1 implique que $(\beta_j(\vec{v}_j), \beta_j(T_j))_{j\in I\!N}$ converge vers $(\vec{v}, T)$ dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ fort ce qui, combiné au point *v)* de la proposition 2.5.1 et une intégration par parties, montre

$$(2.5.3) \qquad \begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} < B_j(\vec{v}_j), \vec{x} > = -\int_\Omega (\vec{U}\,(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\vec{x})\,.\,\vec{v} = \\ \int_\Omega (\vec{U}\,(\vec{v})\,.\nabla_c)\,(\vec{v})\,.\,\vec{x}, \end{cases} \\ \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} < C_j(\vec{v}_j, T_j), \tau > = -\int_\Omega T\,\vec{U}\,(\vec{v})\,.\nabla_c\tau = \\ \int_\Omega \tau\,\vec{U}\,(\vec{v})\,.\nabla_c T. \end{cases} \end{cases}$$

Termes de diffusion. D'après le point *i)* de la proposition 2.5.1,

$$(2.5.4)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty}\left(\nu_h\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla\vec{v}_j\,.\,\nabla\vec{x} + \nu_v\int_0^t\int_\Omega \partial_z\vec{v}_j\,.\,\partial_z\vec{x}\right) = \\ \nu_h\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla\vec{v}\,.\,\nabla\vec{x} + \nu_v\int_0^t\int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{x} \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty}\left(\mathcal{K}_{T,h}\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla T_j.\nabla\tau + \mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega \partial_z T_j.\,\partial_z\tau\right) = \\ \mathcal{K}_{T,h}\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla T\,.\nabla\tau + \mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega \partial_z T\,.\,\partial_z\tau. \end{cases} \end{cases}$$

Par ailleurs, comme l'application linéaire "trace" est continue de $L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))$ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s))$ (*cf.* LIONS-MAGENES [1]), la suite $(T_j)_{j\in I\!N}$ converge faiblement vers T dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^{1/2}(\Gamma))$. Donc en particulier

$$(2.5.5)\qquad \lim_{j\to\infty}\left(\alpha\int_0^t\int_{\partial\Omega}(T^\star - T_j)\,\tau\right) = \alpha\int_0^t\int_{\partial\Omega}(T^\star - T)\,\tau.$$

Forces de Coriolis et de pression.Ê Il est acquis que

$$(2.5.6)\qquad \lim_{j\to\infty}\left(\int_0^t\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}_j\,.\,\vec{x}\right) = \int_0^t\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{x}\;.$$

Par ailleurs, on vérifie grâce au lemme 2.4.2 que l'opérateur M est un opérateur linéaire continu de $L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))$ dans lui même. Il résulte du point *i)* de la proposition 2.5.1 que

$$(2.5.7)\qquad \lim_{j\to\infty}\left(\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T_j)\,.\,\vec{x}\right) = \int_0^t\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{x}\;.$$

Conclusion. En combinant $(\text{Faib2}, j)$ à $(2.5.2, 3, 4, 5, 6, 7)$, on a pour tout $t\in[0,\mathcal{T}]$ (quitte à remplacer $\vec{v}$ et T sur un ensemble de mesure nulle dans $[0,\mathcal{T}]$ par des fonctions dans $[L^1(\Omega)]^2$ et $L^1(\Omega)$ respectivement, *cf.* remarque 2.5.1 plus bas),

$$(\text{Faib1.a})\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \vec{v}\,(t,M)\,.\,\vec{x}\,(t,M)\,dM - \int_\Omega \vec{v}_0\,.\,\vec{x}\,(0,M)\,dM - \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega \vec{v}\,.\,\partial_t\vec{x} + \int_0^t\int_\Omega [\vec{U}\,(\vec{v})\nabla_c](\vec{v})\,.\,\vec{x}\; + \\ \nu_h\displaystyle\int_0^t\int_\Omega \nabla\vec{v}\,.\nabla\vec{x} + \nu_v\int_0^t\int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{x} - \int_0^t\int_{\Gamma_s} \mathrm{\vec{v}}\,.\,\vec{x} + \\ \dfrac{1}{Ro}\left(\displaystyle\int_0^t\int_\Omega f\,\vec{k}\times\vec{v}\,.\,\vec{x} - \int_0^t\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{x}\right) = 0, \end{cases}$$

$$
\text{(Faib1.b)} \qquad \begin{cases}
\displaystyle\int_\Omega T(t,M)\,.\,\tau(t,M)\,dM - \int_\Omega T_0.\,\tau(0,M)\,dM - \\
\displaystyle\int_0^t \int_\Omega T\,.\,\partial_t\tau \;+ \mathcal{K}_{T,h}\int_0^t\int_\Omega \nabla T.\nabla\tau + \\
\displaystyle\mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z\tau \;+ \int_0^t\int_\Omega \vec{U}\,(\vec{v})\nabla_c T\,\tau - \\
\displaystyle\alpha\int_0^t\int_{\partial\Omega}(T^\star - T)\,\tau \;= 0,
\end{cases}
$$

ce qui montre que $(\vec{v}, T)$ est bien une solution faible des équations primitives. Pour que la démonstration du théorème 2.2.1 soit complète, il reste à prouver que

- a) $(\partial_t\vec{v}, \partial_t T) \in L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})' \times (W^{2,2}(\Omega))')$,
- b) $(\vec{v}, T)$ satisfait l'inégalité d'énergie (2.2.3).

On montre le point a). Ce qui précède montre qu'au sens des distributions avec des tests dans l'espace $\mathcal{D}([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{2,2}_{oc} \times W^{2,2}(\Omega))$ on a les égalités

$$
(2.5.8) \qquad \begin{cases}
(a) & \begin{cases}
\partial_t\vec{v} = -(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} \;- W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v} \;+ \nu_h\Delta\vec{v} \;+ \nu_v\partial^2_{zz}\vec{v} \;- \\
\displaystyle\frac{1}{Ro}\left(f\;\vec{k}\,\times\,\vec{v}\;- M(\nabla T)\right) = 0,
\end{cases} \\
(b) & \partial_t T = -(\vec{v}\,\nabla)\,T - W(\vec{v})\,\partial_z T + \mathcal{K}_{T,h}\Delta T + \mathcal{K}_{T,v}\partial^2_{zz}T = 0, \\
(c) & (\vec{v}, T) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega)), \\
(d) & \nu_v\,\partial_z\vec{v}\;|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \\
(e) & \displaystyle\left(\mathcal{K}_{T,h}\frac{\partial T}{\partial\vec{n}_X} + \mathcal{K}_{T,v}\frac{\partial T}{\partial n_z}\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = \alpha\,(T^\star - T), \\
(f) & (\vec{v}, T)_{t=0} = (\vec{v}_0, T_0).
\end{cases}
$$

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2.4.3, on voit que le second membre dans l'égalité $(2.5.8, a)$ (respectivement $(2.5.8, b)$) est dans l'espace $L^1([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{2,2}_{oc})')$ (respectivement $L^1([0,\mathcal{T}], (W^{2,2}(\Omega))')$).

Il reste à montrer l'inégalité d'énergie (2.2.3). On rappelle que pour chaque j,

$$
\begin{cases}
(a) & \begin{cases}
\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\,\vec{v}_j\,|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\,\vec{v}_0\,|^2 + \nu_h\int_0^t\int_\Omega |\nabla\vec{v}_j\;|^2 + \\
\displaystyle\nu_v\int_0^t\int_\Omega |\partial_z\vec{v}_j\,|^2 - \int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{v}_j - \frac{1}{Ro}\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T_j)\,.\,\vec{v}_j = 0,
\end{cases} \\
(b) & \begin{cases}
\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |T_j|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |T_0|^2 + \mathcal{K}_{T,h}\int_0^t\int_\Omega |\nabla T_j|^2 + \\
\displaystyle\mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega |\partial_z T_j|^2 - \alpha\int_0^t\int_\Gamma (T^\star - T_j)\,.\,T_j = 0.
\end{cases}
\end{cases}
$$

On étudie chaque terme de ces égalités l'un après l'autre en faisant tendre j vers l'infini.
En combinant les points *i)* (convergence faible dans E) et *ii)* (convergence forte dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$) de la proposition 2.5.1 au lemme 2.4.2 (continuité de l'opérateur linéaire M), il vient

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T_j)\,.\,\vec{v}_j=\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{v}\;. \tag{2.5.9}$$

Par ailleurs, l'application linéaire trace est continue de $L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega))$ dans $L^2([0,\mathcal{T}],[H^{1/2}(\Gamma_s)]^3)$. Par conséquent, la trace de la suite $(\vec{v}_j,T_j)_{j\in I\!N}$ (toujours notée de la même manière) converge vers celle de $(\vec{v},T)$ dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}],[H^{1/2}(\Gamma_s)]^3)$ faible. Il en résulte

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{v}_j=\int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{v},\\ \displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_{\Gamma_s}T^\star\!.\,T_j=\int_0^t\int_{\Gamma_s}T^\star\!.\,T,\\ \displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_s}T^2\le\liminf_{j\to\infty}\int_0^t\int_{\Gamma_s}T_j^2.\end{cases} \tag{2.5.10}$$

Enfin, grâce à la convergence faible de $(\vec{v}_j,T_j)$ dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}\times H^1(\Omega)$ et le point *iv)* de la proposition 2.5.1, on a pour presque tout $t\in[0,\mathcal{T}]$,

$$\begin{cases}\displaystyle\frac12\int_\Omega|\vec{v}|^2+\nu_h\int_0^t\int_\Omega|\nabla\vec{v}\,|^2+\nu_v\int_0^t\int_\Omega|\partial_z\vec{v}\,|^2\le\\ \displaystyle\liminf_{j\longrightarrow\infty}\left(\frac12\int_\Omega|\vec{v}_j|^2+\nu_h\int_0^t\int_\Omega|\nabla\vec{v}_j\,|^2+\nu_v\int_0^t\int_\Omega|\partial_z\vec{v}_j\,|^2\right)\end{cases}$$

et de même,

$$\begin{cases}\displaystyle\frac12\int_\Omega|T_j|^2+\mathcal{K}_{T,h}\int_0^t\int_\Omega|\nabla T|^2+\mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega|\partial_z T|^2\le\\ \displaystyle\liminf_{j\longrightarrow\infty}\left(\frac12\int_\Omega|T_j|^2+\mathcal{K}_{T,h}\int_0^t\int_\Omega|\nabla T_j|^2+\mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega|\partial_z T_j|^2\right).\end{cases}$$

Cette inégalité combinée à (2.5.9), (2.5.10) et l'égalité d'énergie satisfaite par chaque $(\vec{v}_j,T_j)$ montre que $(\vec{v},T)$ satisfait l'inégalité d'énergie

$$\begin{cases}(a)\begin{cases}\displaystyle\frac12\int_\Omega|\vec{v}|^2-\frac12\int_\Omega|\vec{v}_0|^2+\nu_h\int_0^t\int_\Omega|\nabla\vec{v}\,|^2+\\ \displaystyle\nu_v\int_0^t\int_\Omega|\partial_z\vec{v}\,|^2+\int_0^t\int_{\Gamma_s}\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{v}-\frac{1}{Ro}\int_0^t\int_\Omega M(\nabla T).\,\vec{v}\le 0,\end{cases}\\ (b)\begin{cases}\displaystyle\frac12\int_\Omega|T|^2-\frac12\int_\Omega|T_0|^2+\mathcal{K}_{T,h}\int_0^t\int_\Omega|\nabla T|^2+\\ \displaystyle\mathcal{K}_{T,v}\int_0^t\int_\Omega|\partial_z T|^2-\alpha\int_0^t\int_\Gamma(T^\star-T)\,.\,T\le 0,\end{cases}\end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.1. $\diamondsuit$

REMARQUE 2.5.1 — En appliquant les résultats de LIONS-MAGENES [1], on note que la solution $(\vec{v}, T)$ du problème $(\mathrm{Faib1})$ est dans $C([0, \mathcal{T}], [L^1(\Omega))]^3)$. En revanche, on ne sait pas si les trajectoires sont analytiques par rapport au temps et si oui, dans quel espace optimal cette analycité a lieu. Ce problème est ouvert. $\diamondsuit$

REMARQUE 2.5.2 — L'unicité de la solution à $(M1)$ constitue un problème ouvert. Cependant, on peut écrire un système d'équations primitives stationnaire et linéarisé (*cf.* appendice A) pour lequel on montre l'unicité de la solution sans difficulté. $\diamondsuit$

La première partie de ce livre est terminée. Nous y avons modélisé un système d'équations aux dérivées partielles non turbulent gouvernant la circulation océanique aux échelles climatiques (chapitre 1). Nous avons ensuite démontré pour ce système l'existence d'une solution au sens des distributions à l'aide d'une méthode de compacité (chapitre 2, théorème 2.2.1 et proposition 2.2.1). La question de l'unicité reste ouverte. Dans la partie suivante, on modélise la turbulence verticale dans l'océan, puis on analyse l'équation de l'énergie cinétique turbulente indépendamment des équations primitives.

CHAPITRE 3

MODÈLES DE TURBULENCE VERTICALE

ORIENTATION

1) Le mouvement océanique se structure échelle par échelle, chaque structure échangeant de l'énergie avec les autres. C'est ce que l'on appelle la turbulence. Il est actuellement impossible tant sur le plan théorique que sur le plan numérique de rendre compte de tous les détails de cette turbulence qu'il faut modéliser à l'aide de quantités moyennes, ou encore macroscopiques, en s'efforçant d'inclure dans les équations les effets dus aux échanges d'énergie entre l'échelle d'observation et les petites échelles, supposées dissipatives.

2) La taille des tourbillons horizontaux varie dans l'océan entre le mètre et plusieurs centaines de kilomètres. Cette grande différence d'échelle rend impossible à ce jour une paramétrisation efficace des échanges horizontaux d'énergie entre les gyres océaniques. En revanche, en raison du caractère hydrostatique, de la structure stratifiée de l'océan et de la variation raisonnable des échelles verticales, il est possible de rendre compte des échanges turbulents verticaux. On se limite donc dans ce chapitre à une esquisse de l'étude de la turbulence verticale.

3) L'océan est stratifié, c'est-à-dire organisé en couches successives empilées les unes sur les autres, chaque couche étant de densité constante. Par ailleurs, ce dernier est hydrostatique. On commence dans ce chapitre par définir les quantités locales qui décrivent le mélange vertical et qui tiennent compte de ces observations. Celles-ci sont (*cf.* §3.1) :

- la longueur de mélange vertical ℓ,
- la fréquence de rappel (ou de Brünt-Väisälä), $N^2 = -(g/\rho_0)\partial_z\rho$,
- le nombre de Richardson $Ri = (N^2/|\partial_z \overrightarrow{v}|^2)$.

La longueur de mélange mesure la taille des tourbillons, la fréquence de Brünt-Väisälä permet de définir des conditions d'équilibre hydrostatique à l'interface entre deux couches successives et le nombre de Richardson mesure le rapport entre le cisaillement et la stratification.

4) Le problème de Reynolds consiste à écrire des équations pour des quantités moyennes. À cause des tenseurs de Reynolds, on introduit des viscosités turbulentes (*cf.* section 1.4.2) qui sont les quantités que l'on veut modéliser. Les viscosités turbulentes sont locales et dépendent en principe de ℓ, N^2 et Ri. Les modèles utilisant cette idée sont utiles à la modélisation turbulente d'observations à de "petites échelles". On peut à ce sujet consulter DELEERSNIJDER [1]. En revanche, cette idée est inadaptée à l'étude de la turbulence aux échelles climatiques. Pour cela, il est préférable de calculer les viscosités turbulentes à partir de quantités macroscopiques, dont l'évolution tient compte des aspects locaux mentionnés plus haut. La variable de base utilisée pour cela est *l'énergie cinétique turbulente*, nommée ECT dans toute la suite de ce livre et notée k. L'ECT est la moyenne de l'énergie cinétique de la fluctuation. Dans le paragraphe 2

- on définit l'ECT,
- on écrit l'équation primitive satisfaite par l'ECT, déduite des équations de Navier-Stokes pour un fluide tournant gravitationnel,
- on modélise les tenseurs de Reynolds qui apparaissent dans l'équation primitive pour l'ECT, équation que l'on adimensionnalise pour obtenir l'équation $(3.2.11)$,
- on écrit des conditions aux limites pour l'ECT.

Les viscosités turbulentes sont des fonctions de l'ECT. Les formules obtenues sont déduites d'analyse dimensionnelle (*cf.* section 3.2.1, formule $(3.2.4)$). Cela permet de modéliser le système TKE, système des équations primitives avec des viscosités turbulentes couplé à l'équation pour l'ECT (*cf.* système $(M4)$, section 3.4.3 avec $(\rho, k, \overrightarrow{v}, p_s)$ pour inconnue). Il faut noter que dans ce système, on a remplacé la température T par la densité ρ. Cela est dû au fait que ρ intervient directement dans l'équation pour l'ECT et qu'elle est une variable thermodynamique jouant le même rôle que T. Il est donc plus commode de raisonner à l'aide de ρ plutôt que T, ce que l'on fait dans ce chapitre et les chapitres suivants.

5) On modélise ensuite le système *géostrophico-barotrope* (§2.3) motivé par

- la présence du terme de production $|\partial_z \overrightarrow{v}|^2$ dans le second membre de l'équation pour l'ECT,
- la notion d'équilibre géostrophique.

Le terme $|\partial_z \overrightarrow{v}|^2$ rend difficile l'analyse du système couplé TKE (système $(M4)$). Cette difficulté vient du fait que l'on ne sait pas si les solutions des équations primitives satisfont l'égalité d'énergie (*cf.* chapitre 2, §2.2, théorème 2.2.1), une difficulté issue des termes de transport dans les équations. On ne sait pas passer à la limite dans le terme $|\partial_z \overrightarrow{v}|^2$ (*cf.* §6.1).

Par ailleurs, il est souvent admis en océanographie que loin de l'équateur et aux échelles climatiques, les forces de pressions tendent à s'équilibrer par rapport à la force de Coriolis. C'est l'équilibre géostrophique. *Le champ géostrophique* est la composante du champ des vitesses qui réalise cet équilibre (*cf.* section 3.3, formule

$(3.3.3)$). Ce champ ne dépend que de p_s et de ρ. On est alors tenté de *filtrer* le champ total des vitesses en le remplaçant par le champ géostrophique dans les termes de transport des équations satisfaites par ρ et k et le terme de production d'énergie.
Une fois filtré, le terme de production $|\partial_z \overrightarrow{v}|^2$ est remplacé par $|\nabla \rho|^2$ qui dépend d'une quantité scalaire. Il est a priori “plus facile" de passer à la limite dans ce terme filtré (*cf.* chapitres 5 et 6). En revanche, on introduit dans ce modèle des termes dans les équations qui dépendent de p_s et ne peuvent pas être traités comme des multiplicateurs de Lagrange.

Après cette modélisation, on a obtenu un système (ρ, k) à deux équations dans lequel figure p_s comme inconnue supplémentaire. Ce système n'est pas fermé et on a besoin d'équations supplémentaires. Elles sont obtenues en faisant la moyenne verticale de l'équation satisfaite par $\overrightarrow{v}$ et en écrivant une équation de conservation, ce qui conduit au système *barotrope* qui a la structure des équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles. On le couple avec le système (ρ, k) pour obtenir le système appelé géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$, avec $(\rho, k, p_s, \overline{v})$ pour inconnue où $\overline{v}$ est la composante barotrope de la vitesse.

6) On termine ce chapitre en faisant la synthèse des systèmes modélisés dans ce chapitre. Ils sont analysés dans la partie III de ce livre (chapitres 5 et 6) et sont :

- le système scalaire (ρ, k) ($(M3)$),
- le système TKE $(\rho, k, \overrightarrow{v}, p_s)$ ($(M4)$, $(M5)$),
- le système géostrophico-barotrope turbulent $(\rho, k, p_s, \overline{v})$ $(M6)$.

Cet ordre suit l'ordre de difficulté mathématique. L'analyse de l'équation pour l'ECT (chapitre 4) est essentielle à l'analyse du système scalaire (ρ, k) (chapitre 5), laquelle est essentielle à l'étude des systèmes TKE et géostrophico-barotrope (chapitre 6).

3. 1 — QUANTITÉS LOCALES PROPRES À LA TURBULENCE VERTICALE

3.1.1 — LONGUEUR DE MÉLANGE ET POSITION DU PROBLÈME

Le mouvement d'un fluide est organisé en une cascade d'échelles, chaque échelle transmettant de l'énergie à la suivante jusqu'à l'échelle finale, la plus petite et appelée échelle turbulente. C'est au niveau de l'échelle turbulente que la plus grande partie de l'énergie reçue des grandes échelles est dissipée par un effet de diffusion, l'autre partie étant restituée à la grande échelle par un effet de cascade inverse. C'est un phénomène local.

L'écoulement d'un fluide est entièrement déterminé par son nombre de Reynolds R (*cf.* section 1.4.2 et $(1.4.5)$). Il est possible de définir un nombre de Reynolds vertical propre à chaque échelle et en particulier à l'échelle turbulente :

$$R_{turb} = \frac{\ell \, u}{\nu_v}. \tag{3.1.1}$$

Dans ce qui précède ℓ est l'échelle caractéristique de la turbulence, appelée la longueur de mélange verticale. Elle mesure la taille caractéristique des tourbillons verticaux (voir aussi la section 1.4.5). Par ailleurs, u est la vitesse caractéristique de la turbulence. Il se pose deux problèmes :

- la modélisation de u,
- la modélisation de ℓ.

Ces problèmes seront “résolus" d'ici la fin de la section 3.2. Il faut d'abord comprendre la dynamique du mélange vertical sur un plan local.

REMARQUE 3.1.1 — Le concept de longueur de mélange se comprend mieux dans le cadre de la théorie cinétique où l'on parle dans ce cas de “libre parcours moyen", c'est-à-dire la longueur du parcours libre effectué par une particule entre deux chocs successifs (*cf.* CERCIGNANI [1]). La longueur de mélange vertical pourrait être définie comme étant la longueur parcourue suivant la verticale par un élément infinitésimal de fluide avant d'être entièrement mélangé dans la structure. $\diamondsuit$

3.1.2 — FRÉQUENCE DE RAPPEL

On définit dans cette section la notion abstraite de fréquence de rappel

$$N^2 = -(g/\rho_0)\partial_z \rho,$$

ou encore fréquence de Brünt-Väisälä.

Soit un fluide au repos supposé hydrostatique et stratifié en deux couches distinctes de densité respective ρ_i $(i = 1, 2)$.

Dans ce fluide, on considère un “bouchon" d'eau de densité ρ_0 qui “flotte" à l'interface entre les deux fluides à la cote z_0 (ici $z_0 < 0$). On note s sa section, L sa hauteur totale. Les réels l et l' sont positifs satisfaisant $L = l + l'$. On suppose dans ce qui suit que

$$\rho_1 < \rho_0 < \rho_2.$$

Le centre de gravité G du bouchon est à la cote $z(G)$ et on cherche l'équation d'évolution vérifiée par $z(G)$.

Ce bouchon est soumis aux forces de pression et à la force de gravité. L'équation hydrostatique implique donc que la force totale exercée sur ce bouchon est égale à

$$\vec{F} = g\, s\, ((\rho_2\, l' + \rho_1\, l) - L\, \rho_0)\, \vec{n},$$

où $\vec{n}$ est de norme 1 orienté de bas vers le haut. On note l_0 et l'_0 les valeurs de l et l' à l'équilibre (*i.e.* pour $\vec{F} = 0$). Comme $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$, on a

$$l_0 = L\,\frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2 - \rho_1}, \quad l'_0 = L\,\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

On déplace le bouchon légèrement par rapport à sa position d'équilibre, autour de laquelle ce dernier va osciller. La loi de Newton permet d'écrire, en exprimant toutes les quantités en fonction de z_0 et $z(G)$,

$$\frac{d^2 z(G)}{dt^2} + \frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{L}\right) z(G) = \frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{L}\,z_0 + \frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \rho_0\right). \tag{3.1.2}$$

On suppose pour simplifier que

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{2} = \rho_0.$$

Dans ce qui précède, L joue le rôle de la longueur de mélange vertical. Par ailleurs, on peut en première approximation considérer que chaque ρ_i est une fonction de la profondeur et poser arbitrairement

$$\rho_1 = \rho\left(z_0 + \frac{L}{2}\right), \quad \rho_2 = \rho\left(z_0 - \frac{L}{2}\right),$$

de sorte que

$$\rho_2 - \rho_1 \approx -\,L\,\partial_z\rho(z_0).$$

On définit la “fréquence de Brünt-Väisälä" N par

$$N^2 \stackrel{def}{=} -\frac{g}{\rho_0}\,\partial_z\rho. \tag{3.1.3}$$

Ce nombre N est l'inverse d'un temps. Il mesure la fréquence des oscillations du bouchon autour de sa position d'équilibre par rapport à l'interface lorsque L tend vers 0. La position de son centre de gravité $z(G)$ est déterminée par l'équation (3.1.2) mise sous la forme

$$\frac{d^2 z(G)}{dt^2} + N^2\,z(G) = z_0\,N^2.$$

De toute évidence, cette considération n'est valable qu'aux endroits dits stables où $\partial_z\rho \leq 0$. Dans ce cas $N^2 \geq 0$ et $N = \sqrt{N^2} \geq 0$ a un sens. Ce nombre N est une fréquence de rappel. Aux lieux instables où $0 \leq \partial_z\rho$, $N^2 \leq 0$, on ne peut plus en parler.

REMARQUE 3.1.1 — La fréquence de rappel en océanographie est le plus souvent introduite à l'aide des équations de la thermodynamique (voir GILL [1]). L'approche précédente peut paraître inhabituelle à un physicien mais a l'avantage de mettre en évidence le caractère mécanique de cette notion. ♢

3.1.3 — LE NOMBRE DE RICHARDSON

Dans la section précédente, on a supposé le fluide au repos. Supposons maintenant que la couche 1 soit animée d'une vitesse horizontale $\vec{v}_1$, la couche 2 d'une vitesse horizontale $\vec{v}_2$.

On met maintenant en évidence le rôle de $|\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2$ dans le processus de mélange vertical en ignorant provisoirement l'effet d'oscillation de la section précédente.

Au temps $t = 0$, le bouchon se trouve dans sa position d'équilibre décrit par la figure 3.1.1. À un temps t quelconque mais très petit, on peut considérer que le bouchon se sépare en deux parties distinctes. On note $x_i(G)$ l'abcisse du centre de gravité de la partie i et l'on cherche à relier $x(G)$ et $|\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2$. On a

$$(x_2(G) - x_1(G))\,\overrightarrow{i} = (\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)\,t.$$

En divisant cette égalité par L puis en le faisant tendre vers 0 on obtient

$$|\,\partial_z x(G)\,| = |\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|\,t,$$

montrant en quoi la quantité $|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|$ mesure le cisaillement dynamique entre les deux couches.

En réalité, le bouchon est soumis à l'effet de cisaillement combiné à l'effet d'oscillation décrit dans la section précédente. Cette vision naïve permet de dégager quelques-uns des ingrédients principaux du mélange océanique sur un plan local. Ce mélange est la source de tourbillons verticaux et par suite de turbulence, mesurée par le rapport entre les deux effets. Comme N^2 et $|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2$ ont la même dimension, on introduit le nombre de Richardson local

$$Ri \stackrel{def}{=} \frac{N^2}{|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2}. \tag{3.1.4}$$

Ce nombre sans dimension mesure le rapport entre le cisaillement et la stratification. Cela étant, on veut décrire la turbulence avec des quantités moyennes satisfaisant des équations d'évolution.

3. 2 — TENSEUR DE REYNOLDS ET ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE

3.2.1 — LE PROBLÈME DE REYNOLDS ET ORIENTATION

Pour décrire l'évolution de l'océan à grande échelle, se pose le problème de moyenner les équations primitives en faisant une moyenne statistique, spatiale, temporelle....
On reprend dans cette section les notations de la section 1.4.2 et le cadre général du chapitre 1. Le mouvement océanique est décrit par les variables adimensionnalisées $\overrightarrow{v}$, w, T, S, ρ et p qui vérifient $(EP2)$ (*cf.* section 1.6.3).

Étant donnée une fonction ψ, on note ψ_m sa moyenne suivant un filtre donné et on pose

$$\psi = \psi_m + \psi'.$$

On suppose que le filtre de moyenne satisfait

$$(\psi')_m = 0, \quad (\partial_t \psi)_m = \partial_t(\psi_m), \quad (\nabla\psi)_m = \nabla(\psi_m), \quad (\partial_z\psi)_m = \partial_z(\psi_m).$$

À part le filtre de “moyenne statistique", les filtres utilisés dans la pratique (moyenne en espace, moyenne en temps...) ne satisfont pas ces conditions mais tous les raisonnements et les codes qui sont écrits font comme si car sinon on ne peut mener aucun calcul pratique. D'une manière générale, la recherche d'un “bon filtre" numérique constitue un problème ouvert (*cf.* MOHAMMADI-PIRONNEAU [1]).

Lorsque l'on moyenne le système d'équations primitives $(EP2)$, on obtient le système $(EP2)_m$:

$$(EP2)_m \quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v}_m + (\vec{U}_m \nabla_c)\,\vec{v}_m + div(\vec{v}' : \vec{v}')_m + \partial_z(w'\,\vec{v}')_m - \\ \nu_h \Delta \vec{v}_m - \nu_v \partial^2_{zz}\vec{v}_m + \dfrac{1}{Ro}\left(\vec{k} \times \vec{v}_m + \nabla p_m\right) = 0, \end{cases} \\ (b) & \partial_z p_m = -\rho_m, \\ (c) & div\vec{v}_m + \partial_z w_m = 0, \\ (d) & \begin{cases} \partial_t T_m + (\vec{U}_m \nabla_c) T_m + div(\vec{v}'\,T')_m + \partial_z(w'T')_m - \\ \mathcal{K}_{T,h}\Delta T_m - \mathcal{K}_{T,v}\partial^2_{zz}T_m = 0, \end{cases} \\ (e) & \begin{cases} \partial_t S_m + (\vec{U}_m \nabla_c) S + div(\vec{v}'\,S')_m + \partial_z(w'S')_m - \\ \mathcal{K}_{S,h}\Delta S_m - \mathcal{K}_{S,v}\partial^2_{zz}S_m = 0, \end{cases} \\ (f) & \rho_m = 1 + \alpha_S(S_m - 1) - \alpha_T(T_m - 1), \end{cases}$$

avec

$$\vec{U}_m = \vec{v}_m + w_m\,\vec{k}\ .$$

Dans les équations du système $(EP2)_m$, les termes

$$(\vec{v}' : \vec{v}')_m, \quad (w'\,\vec{v}')_m, \quad (\vec{v}'\,T')_m, \quad (w'T')_m, \quad (\vec{v}'\,S')_m, \quad (w'S')_m,$$

sont les composantes du tenseur de Reynolds. Sa détermination rigoureuse est un problème ouvert. En effet, on peut être tenté d'écrire une équation pour chacun de ces termes. Ce faisant, on voit qu'il apparaît des termes d'ordre 3 de la même forme et ainsi de suite et on n'arrive pas à fermer le système de cette manière. C'est pourquoi on cherche à modéliser le tenseur de Reynolds en utilisant des arguments physiques.

Sa présence dans les équations constitue pour la grande échelle une perte d'énergie par dissipation. Pour cette raison, l'hypothèse de Reynolds consiste à écrire que le tenseur de Reynolds est proportionnel au gradient total. Le coefficient de proportionnalité est calculé à partir des viscosités turbulentes et le signe est imposé par le fait que l'on cherche à modéliser une perte. On pose alors

$$
(3.2.1) \qquad \begin{cases}
(\overrightarrow{v}':\overrightarrow{v}')_m = -\,\nu_h^t\,\nabla\overrightarrow{v}_m, \quad (w'\,\overrightarrow{v}')_m = -\,\nu_v^t\,\partial_z\overrightarrow{v}_m,\\
(\overrightarrow{v}'\,T')_m = -\,\mu_{T,h}^t\,\nabla T_m, \quad (w'\,T')_m = -\,\mu_{T,v}^t\,\partial_z T_m,\\
(\overrightarrow{v}'\,S')_m = -\,\mu_{S,h}^t\,\nabla S_m, \quad (w'S')_m = -\mu_{S,v}^t\,\partial_z S_m,
\end{cases}
$$

où ν_h^t, ν_v^t, $\mu_{T,h}^t$, $\mu_{T,v}^t$, $\mu_{S,h}^t$ et $\mu_{S,v}^t$ sont les viscosités turbulentes. Le système $(EP2)_m$ s'écrit alors sous la forme

$$
(EP2)_m \qquad \begin{cases}
(a) \quad \begin{cases}
\partial_t\overrightarrow{v}_m + (\overrightarrow{U}_m\,\nabla_c)\,\overrightarrow{v}_m - div((\nu_h+\nu_h^t))\,\nabla\overrightarrow{v}_m) - \\
\partial_z((\nu_v+\nu_v^t)\,\partial_z\overrightarrow{v}_m) + \dfrac{1}{Ro}\left(\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{v}_m + \nabla p_m\right) = 0,
\end{cases}\\
(b) \quad \partial_z p_m = -\rho_m,\\
(c) \quad div\overrightarrow{v}_m + \partial_z w_m = 0,\\
(d) \quad \begin{cases}
\partial_t T_m + (\overrightarrow{U}_m\,\nabla_c)T_m - div((\mathcal{K}_{T,h}+\mu_{T,h}^t)\,\partial_z T_m) - \\
\partial_z((\mathcal{K}_{T,v}+\mu_{T,v}^t)\,\partial_z T_m) = 0,
\end{cases}\\
(e) \quad \begin{cases}
\partial_t S_m + (\overrightarrow{U}_m\,\nabla_c)S_m - div((\mathcal{K}_{S,h}+\mu_{S,h}^t)\,\partial_z S_m) - \\
\partial_z((\mathcal{K}_{S,v}+\mu_{S,v}^t)\,\partial_z S_m) = 0,
\end{cases}\\
(f) \quad \rho_m = 1 + \alpha_S(S_m - 1) - \alpha_T(T_m - 1).
\end{cases}
$$

Tout le problème consiste à calculer les viscosités turbulentes, outre la détermination de u et ℓ (*cf.* la section 3.1.1 et (3.1.1)). Compte tenu de la difficulté due à la grande différence d'échelles horizontales, on prend les viscosité horizontales ν_h^t, $\mu_{T,h}^t$ et $\mu_{S,h}^t$ constantes. Les valeurs numériques varient en fonction du lieu et sont déduites en général de faits d'expériences.

On peut dans un premier temps supposer que u, ℓ et les viscosités turbulentes verticales sont entièrement dépendantes de Ri et N^2 (*cf.* les formules dans DELEERSNIJDER [1] et BLANKE [1]). Cependant cette description est trop locale pour un traitement de la circulation océanique turbulente aux échelles climatiques. C'est pourquoi on introduit l'énergie cinétique turbulente qui est une quantité macroscopique (ECT dans la suite).

Enfin, en raisonnant comme dans les paragraphes 1.4 et 1.5 du chapitre 1, on obtient naturellement comme conditions aux limites moyennées (après simplification des coefficients) :

$$(CL2)_m \quad \begin{cases} (a) & w_m|_{\Gamma_s} = 0, \quad (\nu_v + \nu_v^t)\, \partial_z \vec{v}_m \,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \\ (b) & \vec{U}_m \,|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (c) & \begin{cases} \left((\mathcal{K}_{T,h} + \mu_{T,h}^t)\, \dfrac{\partial T_m}{\partial \vec{n}_X} + (\mathcal{K}_{T,v} + \mu_{T,v}^t)\, \dfrac{\partial T_m}{\partial n_z} \right)\Big|_{\Gamma} = \\ \alpha\,(T^\star - T_m), \end{cases} \\ (d) & \left((\mathcal{K}_{S,h} + \mu_{S,h}^t)\, \dfrac{\partial S_m}{\partial \vec{n}_X} + (\mathcal{K}_{S,v} + \mu_{S,v}^t)\, \dfrac{\partial S_m}{\partial n_z} \right)\Big|_{\Gamma} = 0, \\ (e) & \vec{v}_m \,|_{t=0} = \vec{v}_{0,m} \quad T_m|_{t=0} = T_{0,m}, \qquad S_m|_{t=0} = S_{0,m}, \end{cases}$$

où l'on a noté avec un indice m les quantités moyennes. Il n'y a pas à moyenner la tension du vent. On rappelle en effet que la condition de flux en surface est obtenue pour des quantités déjà moyennées (*cf.* la section 1.4 du chapitre 1).

REMARQUE 3.2.1 — Les conditions aux limites physiques pour la température obtenues dans la section 1.5.5 sont non linéaires (*cf.* formule $(1.5.8)$). Dans ce cas, il faut modéliser des conditions aux limites pour la température moyenne à l'aide d'hypothèses de Reynolds. ♢

3.2.2 — L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE : DÉFINITION

L'objectif principal est la détermination des viscosités turbulentes verticales ν_v^t, $\mu_{T,v}^t$ et $\mu_{S,v}^t$ à partir de l'énergie cinétique turbulente. Pour cela, il faut raisonner en “amont" à partir des “vraies" variables physiques notées comme les variables sans dimension.

L'énergie cinétique pour le mouvement turbulent est notée e et sa moyenne notée k. Elles sont définies par

$$e \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(|\vec{v}'|^2 + |w'|^2\right), \quad k \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(|\vec{v}'|^2 + |w'|^2\right)_m = e_m. \tag{3.2.2}$$

On appelle k l'énergie cinétique turbulente (ECT dans la suite). C'est à partir de k que l'on cherche à paramétrer la turbulence.

On note que

- $\sqrt{k}$ a la dimension d'une vitesse,
- $\ell\sqrt{k}$ a la dimension d'une viscosité.

On suppose que les viscosités turbulentes et la vitesse caractéristisque de la turbulence dépendent de k et de ℓ. En notant en général ν_t une viscosité turbulente, on est conduit à poser après une analyse dimensionnelle

$$u = \sqrt{k}, \tag{3.2.3}$$

$$\nu_t = C\,\ell\,\sqrt{k}, \tag{3.2.4}$$

où C est une constante sans dimension, déterminée en général en comparant les simulations numériques aux résultats expérimentaux.

En toute rigueur, on doit déterminer une équation d'évolution satisfaite par k et une équation satisfaite par ℓ. On dérive d'abord une équation satisfaite par k (sections 3.2.3 et 3.2.4) puis on discute de la détermination de ℓ (section 3.4.5).

3.2.3 — ÉQUATION PRIMITIVE POUR L'ECT

Cette section et la section suivante reprennent brièvement les arguments de BLANKE [1] pour la détermination d'une équation pour l'ECT. Dans cette section on dérive l'équation primitive $(3.2.8)$ pour k. Nous ne détaillons pas tous les calculs qui sont écrits dans BLANKE [1].

Comme dans la section 1.4.2, on se place provisoirement dans le cadre abstrait d'un fluide coulant dans un domaine de $\mathbb{R}^n$ avec $\vec{U}$ pour vecteur vitesse. Pour simplifier la présentation on utilise la convention de la sommation des indices répétés. On pose

$$\begin{cases} \vec{U} = U^\alpha \vec{e}_\alpha + U^n \vec{e}_n, \quad U^\alpha = U_m^\alpha + u^\alpha, \\ e = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} |u^\alpha|^2, \quad k = \dfrac{1}{2}(\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} |u^\alpha|^2)_m. \end{cases}$$

Dans ce qui suit,

- on écrit l'équation satisfaite par U_m^α puis celle satisfaite par u_α,
- on en déduit une première équation pour k que l'on simplifie à l'échelle climatique à l'aide de l'hypothèse "petit quotient d'aspect".

On repart des équations de Navier-Stokes de base satisfaites par un fluide gravitationnel. La force de Coriolis ne travaillant pas, elle n'apparaît pas dans ce bilan d'énergie. C'est pourquoi on n'en tient pas compte par la suite. Donc en prenant $\rho = \rho_0$ dans les facteurs des termes d'évolution, l'équation de départ est

$$\partial_t \vec{U} = \nu \Delta \vec{U} - (\vec{U}\nabla_c)\vec{U} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p - g\frac{\rho}{\rho_0}\vec{e}_n .$$

On en déduit l'équation satisfaite par U_m^α,

$$(3.2.5) \qquad \partial_t U_m^\alpha = -U_m^\beta \partial_\beta U_m^\alpha - \frac{1}{\rho_0}\partial_\alpha p_m + \nu\Delta_c U_m^\alpha - (u^\beta \partial_\beta u^\alpha)_m - \delta_n^\alpha g \frac{\rho}{\rho_0},$$

avec $\delta_n^\alpha = 1$ si $n = \alpha$, zéro sinon. Par ailleurs, l'équation satisfaite par les fluctuations est

$$(3.2.6) \qquad \begin{cases} \partial_t u^\alpha = -U_m^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta U_m^\alpha - u^\beta \partial_\beta u^\alpha - \\ \dfrac{1}{\rho_0}\partial_\alpha p' + \nu\Delta_c u^\alpha + (u^\beta \partial_\beta u^\alpha)_m - \delta_n^\alpha g \dfrac{\rho'}{\rho_0}. \end{cases}$$

On définit le tenseur des déformations par

$$\sigma_{\alpha,\beta} \stackrel{def}{=} \rho_0 \, \nu \left(\partial_\beta U^\alpha + \partial_\alpha U^\beta \right).$$

Un calcul long mais facile consistant à multiplier $(3.2.6)$ par u^α et de moyenner le résultat obtenu, conduit à

$$(3.2.7) \qquad \begin{cases} \partial_t k = -\,\partial_\alpha(k\,U^\alpha) - \partial_\alpha(e\,u^\alpha)_m + \dfrac{1}{\rho_0}\,\partial_\alpha(u^\beta\,\sigma'_{\alpha,\beta})_m - \\ (u^\alpha\,u^\beta)_m\,\partial_\alpha U^\beta - \dfrac{1}{\rho_0}\,\partial_\alpha(p'\,u^\alpha)_m - \delta_n^\alpha\,\dfrac{g}{\rho_0}\,(\rho'\,u^\alpha)_m - \\ \dfrac{1}{\rho_0}\,(\sigma'_{\alpha,\beta}\,\partial_\alpha u^\beta)_m. \end{cases}$$

On replace l'équation abstraite $(3.2.7)$ dans le cadre géophysique qui nous intéresse, pour lequel le quotient d'aspect est petit et $n = 3$.

Comme le quotient d'aspect est petit, on peut négliger au premier ordre les dérivées horizontales devant les dérivées verticales, une approximation qui semble raisonnable pour les quantités moyennes lorsque l'on ne veut traiter que la turbulence verticale. Ce point serait à justifier rigoureusement au moyen de développements asymptotiques et constitue du point de vue des mathématiques un problème ouvert. On pose en quelque sorte $\partial_x = \partial_y = 0$ et on revient au système de notations habituelles

$$\vec{U} = \vec{v} + w\,\vec{k} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2 + w\,\vec{k}\ .$$

Le tenseur des déformations dans ce cas est la matrice 3×3 symétrique

$$\sigma = \rho_0 \nu \begin{pmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{x,y} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{x,z} & \sigma_{y,z} & \sigma_{z,z} \end{pmatrix} = \rho_0 \nu \begin{pmatrix} 2\,\partial_x u & \partial_y u + \partial_x v & \partial_z u + \partial_x w \\ \partial_y u + \partial_x v & 2\,\partial_y v & \partial_z v + \partial_y w \\ \partial_z u + \partial_x w & \partial_z v + \partial_y w & 2\,\partial_z w \end{pmatrix}$$

L'équation de Boussinesq

$$div \vec{v}_m + \partial_z w_m = 0$$

combinée à l'hypothèse du toit rigide $w_m = 0$ sur Γ_s impose $w_m = 0$. L'équation $(3.2.7)$ se simplifie alors et on a

$$(3.2.8) \qquad \begin{cases} \partial_t k = -\,\partial_z(w'\,e)_m + \dfrac{1}{\rho_0}\,[\partial_z(u'\,\sigma'_{z,x})_m + \partial_z(v'\,\sigma'_{z,y})_m + \\ \partial_z(w'\,\sigma'_{z,z})_m] - (u'\,w')_m\,\partial_z u_m - (v'\,w')_m\,\partial_z v_m - \dfrac{1}{\rho_0}\,\partial_z(p'\,w')_m - \\ \dfrac{g}{\rho_0}\,(\rho'\,w')_m - \nu|\nabla_c \vec{U}' + (\nabla_c \vec{U}')^t|_m^2. \end{cases}$$

L'équation $(3.2.8)$ est appelée l'équation primitive pour l'ECT.

3.2.4 — FERMETURES DANS L'ÉQUATION POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE

L'équation primitive $(3.2.8)$ est inutilisable telle quelle. Il faut pouvoir tout exprimer à l'aide de quantités macroscopiques. Pour cela, on se sert de l'hypothèse de Reynolds $(3.2.1)$. On étudie chaque terme du second membre de l'équation $(3.2.8)$ l'un après l'autre.

i) La dissipation turbulente est définie par

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \nu |\nabla_c \vec{U}' + (\nabla_c \vec{U}')^t|^2_m. \tag{3.2.9}$$

Le terme $-\varepsilon$ dans l'équation $(3.2.8)$ est le terme de destruction. C'est lui qui caractérise la cascade inverse. Il est lié à k et ℓ (*cf.* formule $(3.2.14)$) et fait l'objet de la discussion de la section 3.2.6. Pour le moment on le garde tel quel.

ii) Le terme

$$(1/\rho_0)\,[\partial_z(u'\,\sigma'_{z,x})_m + \partial_z(v'\,\sigma'_{z,y})_m + \partial_z(w'\,\sigma'_{z,z})_m]$$

est un terme de transport d'origine moléculaire, c'est-à-dire qu'il est généré par un mouvement brownien. On le néglige devant les termes de transport ce qui revient à le considérer comme étant nul.

iii) On considère les termes aux tensions de Reynolds

$$-\frac{g}{\rho_0}\,(\rho' w')_m, \quad -(u'\,w')_m\,\partial_z u_m - (v'\,w')_m\,\partial_z v_m = -\,(w'\,\vec{v}')\,.\,\vec{v}_m\,.$$

On les modélise à l'aide de l'hypothèse de Reynolds $(3.2.1)$. Pour simplifier, on suppose dans ce qui suit que

$$\mu^t_{T,v} = \mu^t_{S,v} \stackrel{def}{=} \mu_t.$$

En combinant $(3.2.1)$ à l'équation d'état $(EP1, d)$ liant ρ, S et T, on obtient

$$-\frac{g}{\rho_0}\,(\rho' w')_m = \mu_t\,\frac{g}{\rho_0}\,\partial_z \rho_m.$$

On reconnait le terme de rappel mis en évidence dans le paragraphe précédent. On a de même,

$$-(w'\,\vec{v}')_m.\,\partial_z \vec{v}_m = \nu^t_v\,|\,\partial_z \vec{v}_m\,|^2.$$

Ce terme d'énergie correspond à l'énergie de cisaillement vertical, rencontré également dans le paragraphe précédent (*cf.* section 3.1.3).

iv) Enfin, il reste à paramétrer le terme

$$-(e\,w')_m - \frac{1}{\rho_0}\,(p'\,w')_m.$$

On utilise l'hypothèse de fermeture de Reynolds en posant

$$-(e\,w')_m - \frac{1}{\rho_0}(p'\,w')_m = \nu_t\,\partial_z e_m = \nu_t\,\partial_z k,$$

où ν_t est une viscosité turbulente. On suppose d'habitude μ_t et ν_t proportionnels.

En définitive, l'équation pour k est la suivante. Toutes les quantités considérées étant maintenant des quantités moyennes, on n'écrit plus les indices m,

$$\partial_t k - \partial_z(\nu_t\,\partial_z k) = \nu_v^t\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \frac{g}{\rho_0}\,\mu_t\,\partial_z\rho - \varepsilon. \tag{3.2.10}$$

On termine cette section en adimensionnalisant les termes dans l'équation $(3.2.10)$. Pour cela, on utilise les formules de la section 1.6.2 dont on reprend les notations (ici les primes ne jouent plus le même rôle). On pose

$$k'(t',M') = \frac{\tau^2}{L_v^2}k(t,M), \quad \varepsilon'(t',M') = \frac{\tau^3}{L_v^2}\varepsilon(t,M),$$

et de même,

$$(\nu_v^t)' = \frac{\tau}{\delta^2 L_v^2}\nu_v^t, \quad (\mu_t)' = \frac{\tau}{\delta^3 Ro\, L_v^2}\mu_t, \quad (\nu_t)' = \frac{\tau}{L_v^2}\nu_t.$$

L'équation $(3.2.10)$ devient, en ommettant les primes

$$\partial_t k - \partial_z(\nu_t\,\partial_z k) = \nu_v^t\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \mu_t\,\partial_z\rho - \varepsilon.$$

Pour des raisons de régularité, autant numériques que théoriques, on remplace dans la pratique cette équation par l'équation

$$\partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t\,\partial_z k) = \nu_v^t\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \mu_t\,\partial_z\rho - \varepsilon, \tag{3.2.11}$$

où $\lambda > 0$ est une constante (*cf.* DELECLUSE [2]). Il reste à établir des conditions aux limites pour k.

3.2.5 — CONDITIONS AUX LIMITES POUR L'ECT

Au fond et sur les parois latérales, on néglige la turbulence. Aussi y impose t-on à k une valeur prescrite qui est positive. Toujours pour simplifier le formalisme sans changer la structure mathématique du problème, on la prendra nulle. En surface, on fait l'hypothèse que l'ECT dépend uniquement de la tension du vent. Une analyse dimensionelle conduit à poser

$$k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \tag{3.2.12}$$

m_b est une constante sans dimension calculée à partir de données expérimentales. Ces conditions aux limites sont conservées pour les variables sans dimension en conservant la même notation.

On note k_0 la donnée initiale, c'est-à-dire la valeur de k au temps $t = 0$ déduite en principe d'observations expérimentales.

3.2.6 — CALCUL DES VISCOSITÉS TURBULENTES

Tant qu'il n'y a pas de risque de confusion, ν_t est une viscosité turbulente quelconque. Dans la section 3.2.1, on a écrit la formule

$$\nu_t = C\ell\sqrt{k},$$

déduite d'une analyse dimensionnelle. Le but est le calcul des viscosités turbulentes. Il reste les deux problèmes :

- le calcul de ℓ,
- le calcul de ε qui est dans le deuxième membre de l'équation pour l'ECT (3.2.11).

On fait l'hypothèse traditionnelle :

on suppose que ε ne dépend que de k et de ℓ.

Une analyse dimensionnelle montre que cette hypothèse implique que

$$\varepsilon = C\frac{k\sqrt{k}}{\ell}, \tag{3.2.13}$$

C est une constante sans dimension calculée à l'aide de résultats numériques comparés aux résultats expérimentaux.

Donc la détermination de ℓ et celle de ε constituent le même problème. On peut envisager deux raisonnements :

- (i) prendre ℓ constant,
- (ii) écrire une équation pour ℓ.

• (i) C'est la solution le plus souvent retenue, en particulier dans l'étude de la couche turbulente de surface épaisse d'une dizaine de mètres en moyenne. On choisit ℓ de l'ordre du mètre. On peut aussi dans les codes exprimer ℓ en fonction de Ri et N^2 (*cf.* les formules dans BLANKE [1]). On choisit dans cet essai ℓ constant égal à 1, ce qui conduit déjà à des systèmes assez complexes, systèmes qu'il faut analyser en premier. Dans ce cas, ε est déterminé par

$$\varepsilon = k\sqrt{k}, \tag{3.2.14}$$

avec $C = 1$ pour simplifier le problème de mathématiques que l'on est en train de construire. De même, les viscosités turbulentes sont calculées par les formules :

$$\nu_t = \nu_t(k) = c_1\sqrt{k}, \quad \nu_v^t = \nu_v^t(k) = c_2\sqrt{k}, \quad \mu_t = \mu_t(k) = c_3\sqrt{k}, \tag{3.2.15}$$

où les c_i sont des constantes sans dimension. L'équation satisfaite par k est

$$\partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{k}. \tag{3.2.16}$$

Il y a deux difficultés dans cette équation liées aux viscosités turbulentes :

a) la viscosités turbulente ν_t peut s'annuler,
b) les viscosités turbulentes ν_v^t et μ_t ne sont pas des fonctions bornées de k.

a) dans la pratique on remplace la viscosités calculées par les formules $(3.2.15)$ par la formule

$$\nu_t = \nu_t(k) = max(\nu, c_1\sqrt{k}), \tag{3.2.17}$$

$\nu > 0$.

b) Cette difficulté est d'ordre technique dans l'analyse mathématique. La plupart des résultats obtenus sur les systèmes couplés supposent que les viscosités ν_v^t et μ_t sont des fonctions bornées de k. Seul le cas du système scalaire stationnaire $(M3)$ est résolu lorsque les viscosités ne sont pas des fonctions bornées de k, système pour lequel on montre l'existence de solutions renormalisées (*cf.* théorème 5.3.1 section 5.3.1). Donc d'une manière générale, on suppose que

$$\begin{cases} \nu_v^t = \nu_v^t(k) = \beta_M(c_2\sqrt{k}), \\ \mu_t = \mu_t(k) = \beta_M(c_3\sqrt{k}). \end{cases} \tag{3.2.18}$$

La fonction de troncature β_M est explicitée dans la définition 2.2.1 (section 2.2.2) et M est choisi de manière arbitraire.

• (ii) Dans MELLOR-YAMADA [1], les auteurs écrivent une deuxième équation d'évolution, laquelle combinée à l'équation pour k permet de calculer ℓ. Le système de MELLOR-YAMADA est sujet à controverse (*cf.* DELEERSNIJDER-LUYTEN Ê[1]).

On peut également chercher une équation satisfaite par ε en s'inspirant du modèle (k, ε) classique (*cf.* MOHAMMADI-PIRONNEAU [1]). En effet, en combinant les formules $(3.2.4)$ (détermination de ν_t en fonction de k et ℓ) et $(3.2.13)$ (détermination de ε en fonction de k et ℓ) on trouve (en notant ν_t une viscosité turbulente quelconque),

$$\nu_t = \nu_t(k, \varepsilon) = C\frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{3.2.19}$$

Cette formule est tronquée par valeurs inférieures et supérieures comme on l'a fait en $(3.2.18)$ plus haut. Par analogie avec l'étude de l'équation pour k faite dans les sections 3.2.3 et 3.2.4 et le modèle (k, ε) abstrait standard, on est conduit à écrire le système (k, ε) pour la turbulence verticale dans l'océan :

$$\begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 + \mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \varepsilon, \\ \partial_t \varepsilon - \lambda\Delta \varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \varepsilon) = k|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 + \dfrac{\varepsilon}{k}\,\mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \dfrac{\varepsilon^2}{k}. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

Dans la littérature habituelle parlant de modélisation de la turbulence, l'équation pour ε dans le modèle (k, ε) n'est pas vraiment justifiée. Dans l'équation précédente pour ε, on a écrit le terme

$$\frac{\varepsilon}{k}\,\mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \rho$$

en tenant compte du terme hydrostatique présent dans l'équation pour k. On a donc incorporé dans l'équation pour ε un terme de rappel de la forme

$$f(k,\varepsilon)\mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \rho.$$

La forme donnée à $f(k, \varepsilon)$ est déduite d'une analyse dimensionnelle. Le modèle (3.2.20) est intuitif et seule l'équation pour k dans ce modèle a un fondement physique. L'équation pour ε ne peut que trouver une justification numérique.

Il reste à fixer des conditions aux limites pour ε. En toute rigueur, il faudrait pour cela utiliser des lois de paroi (*cf* MOHAMMADI-PIRONNEAU [1]). Cela étant, ce travail n'a pas pour but l'étude du modèle (k, ε). Donc pour simplifier, on impose sur $\Gamma_f \cap \Gamma_l$ des conditions de Dirichlet homogènes (dissipation nulle). On impose à ε d'être égal sur Γ_f à la dissipation horizontale ε_a de la tension du vent définie par

$$\varepsilon_a = \nu_a |\nabla \vec{v}_a + (\nabla \vec{v}_a)^t|^2,$$

où ν_a est la viscosité de l'air et $\vec{v}_a$ la composante horizontale de la vitesse de l'air. Donc on pose

$$\varepsilon|_{\Gamma_f \cup \Gamma_f} = 0, \quad \varepsilon|_{\Gamma_s} = \varepsilon_a. \tag{3.2.21}$$

Ceci achève la modélisation des viscosités turbulentes et de l'ECT. La synthèse du couplage des modèles de turbulence (3.2.16) et (3.2.18) ou (3.2.19) et (3.2.20) avec les équations primitives est renvoyée au paragraphe 3.4. Au préalable, il reste encore du travail de modélisation. En effet, le terme de production $|\partial_z \vec{v}\,|^2$ pose une difficulté mathématique car on ne sait pas si les solutions des équations primitives satisfont l'égalité d'énergie (*cf.* théorème 2.2.1). C'est en partie ce qui motive la recherche d'un modèle alternatif.

3. 3 — MODÈLE GÉOSTROPHICO BAROTROPE

3.3.1 — ORIENTATION

Dans ce paragraphe on

- définit le champ géostrophique et on calcule le terme de cisaillement $|\partial_z \vec{v}\,|^2$ en filtrant le champ des vitesses par l'équilibre géostrophique,
- on écrit une équation et des conditions aux limites pour la densité,

- on moyenne l'équation pour $\overrightarrow{v}$ suivant la verticale pour pouvoir calculer p_s à l'aide d'une équation de Navier-Stokes bidimensionnelle.

On rappelle que l'équation $(EP2, a)$ du système des équations primitives adimensionnalisées s'écrit :

$$\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \overrightarrow{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \overrightarrow{v} + \frac{1}{Ro}\left(f\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v} + \nabla p\right) = 0.$$

Plus le nombre de Rossby Ro est petit et plus l'échelle d'observation en temps est grande par rapport au temps de révolution terrestre. On est donc tenté aux échelles climatiques de faire tendre Ro vers zéro dans cette équation. Si on le fait brutalement, on trouve à la limite l'équation

$$f\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v} + \nabla p = 0.$$

C'est ce que l'on appelle *l'équilibre géostrophique*, souvent utilisé en climatologie aux échelles climatiques (*cf.* PEDLOSKI [1]). En utilisant l'équilibre géostrophique, on dit d'un point de vue physique que la force de Coriolis est entièrement compensée par les forces de pression.

Cependant, ce passage à la limite est plus délicat qu'il n'y paraît. Dans GRENIER Ê[1], l'auteur met en évidence l'apparition d'oscillations dans les équations lorsque Ro tend vers zéro. On peut voir aussi l'appendice B, où en suivant LIONS [2] on met ce phénomène d'oscillations en évidence à partir d'un modèle bidimensionnel simplifié. On est alors tenté pour Ro "'petit" de scinder le champ des vitesses en une partie géostrophique et une partie oscillante, et écrire

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{U}_g + \overrightarrow{U}_{osc},$$

ce que fait J.-Y. CHEMIN (*cf.* CHEMIN [1]) dans l'étude des équations quasi-géostrophiques (*cf.* aussi PEDLOSKI [1], LIONS [2]).

3.3.2 — CHAMP GÉOSTROPHIQUE : DÉFINITION ET ECT

On commence par définir le champ géostrophique en raisonnant avec des variables adimensionnalisées.

DÉFINITION 3.3.1 — *On appelle le champ géostrophique, noté $\overrightarrow{U}_g$, la composante du champ horizontal de la vitesse dont la force de Coriolis associée équilibre les forces de pressions, c'est-à-dire la solution de l'équation*

$$f\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{U}_g + \nabla p = 0. \tag{3.3.1}$$ ♢

On pose dans la suite,

$$\overrightarrow{U}_g = U_g \overrightarrow{e}_1 + V_g \overrightarrow{e}_2 .$$

De l'équation $(3.3.1)$ on déduit que

$$U_g = -\frac{1}{f}\,\partial_y p, \quad V_g = \frac{1}{f}\,\partial_x p. \tag{3.3.2}$$

Cette notion n'a de sens qu'aux lieux où $f \neq 0$, c'est-à-dire lorsque l'on n'est pas à l'équateur. Tant que l'on étudie un modèle où intervient la géostrophie, on suppose que $f \neq 0$, de sorte que pour simplifier le formalisme on pose à partir de maintenant $f = 1$.

Lorsque l'on combine les formules $(3.3.2)$ à l'équation hydrostatique $(EP2, b)$ $\partial_z p = -\rho$ on obtient

$$\begin{cases} U_g = -M(\partial_y \rho) - \partial_y p_s \overset{def}{=} U_g(p_s, \rho), \\ V_g = M(\partial_x \rho) + \partial_x p_s \overset{def}{=} V_g(p_s, \rho). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

On note en premier lieu que pour tout p_s et tout ρ, le champ $\overrightarrow{U}_g$ vérifie la contrainte d'incompressibilité

$$div \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) = 0. \tag{3.3.4}$$

En remplaçant $\overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{U}_g$ dans certains termes des équations primitives et des équations de la turbulence, on filtre les oscillations dans le système. C'est ce que l'on fait dans l'équation satisfaite par la variable thermodynamique ρ et l'ECT. On remplace en particulier le terme de cisaillement $|\partial_z \overrightarrow{v}|^2$ dans l'équation pour l'ECT $(3.2.16)$ par le terme de cisaillement géostrophique $|\partial_z \overrightarrow{U}_g|^2$, terme calculé en fonction de ρ dans ce qui suit. On a

$$\partial_z \overrightarrow{U}_g = -(\partial_y \rho + \partial^2_{zy} p_s) \overrightarrow{e}_1 + (\partial_x \rho + \partial^2_{zx} p_s) \overrightarrow{e}_2 .$$

Puisque p_s ne dépend pas de z,

$$\partial_z \overrightarrow{U}_g = -\partial_y \rho \overrightarrow{e}_1 + \partial_x \rho \overrightarrow{e}_2 .$$

On en déduit

$$|\partial_z \overrightarrow{U}_g|^2 = |\nabla \rho|^2. \tag{3.3.5}$$

Par conséquent, l'équation filtrée pour l'ECT s'écrit

$$\partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu^t_v(k)\,|\nabla\rho|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{k}. \tag{3.3.6}$$

Cette remarque est la base de la construction du modèle géostrophico-Barotrope. En effet, on sait d'après des résultats dans LEWANDOWSKI [4] que le terme de production issu d'une quantité scalaire pose moins de problèmes sur le plan des mathématiques que lorsqu'il est issu d'une quantité vectorielle, pour des raisons "d'égalité d'énergie" (voir aussi les chapitres 5 et 6). Pour construire maintenant un modèle de tubulence basé sur l'équation $(3.3.6)$, il faut :

• écrire une équation pour ρ,
• fermer le système en déterminant p_s qui n'est plus un multiplicateur de Lagrange dans cette approche.

On écrit l'équation pour ρ dans la section suivante, la détermination de p_s fait l'objet de la section 3.3.4.

REMARQUE 3.3.1 — Ce que l'on vient de faire avec l'équation pour k (3.2.16), on peut le faire de la même manière avec le système (k, ε) (3.2.22). $\diamondsuit$

3.3.3 — ÉQUATION POUR LA DENSITÉ ET CONDITIONS AUX LIMITES

L'équation pour ρ est une équation de transport-diffusion qui s'inspire de l'équation $(EP2, d)$. Il est cohérent que cette équation soit telle que :

— le champ géostrophique détermine le terme de transport,
— le coefficient de la diffusion horizontale est une constante,
— la diffusion verticale est déterminée par la viscosité turbulente μ_t qui intervient dans (3.3.6).

En s'inspirant de l'équation sur ρ écrite dans COLIN DE VERDIÈRE [1], on incorpore au second membre un terme source rétroactif qui tient compte des échanges thermodynamiques, en particulier en surface. Sur ces bases, on écrit l'équation

$$\partial_t \rho + \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) . \nabla \rho - \mathcal{K}_h \Delta \rho - \partial_z ((\mu_t(k) + \nu) \, \partial_z \rho) = F(\rho), \tag{3.3.7}$$

qui diffère de celle écrite dans COLIN DE VERDIÈRE [1] par les termes de transport et les viscosités turbulentes. On trouve dans la référence précédente comme exemple pour $F(\rho)$:

$$F(\rho) = -Y(z) \, \rho, \tag{3.3.8}$$

où $Y(z) \in [0, 1]$ est une fonction cutt-off qui modélise la pénétration des rayons solaires dans l'océan.

Il reste à déterminer les conditions aux limites pour ρ. En supposant que Γ_f et Γ_l sont recouverts par la même “couche" océanique, on impose à ρ d'être constant au fond et sur les parois latérales, une constante prise égale à zéro. Cela revient en fait à considérer la variation de la densité autour de la valeur moyenne ρ_0. Sur le toit de l'océan on impose une condition d'échange analogue à celle vérifiée par T. Par conséquent, on pose

$$\rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\nu + \mu_t(k)) \, \partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha \rho, \quad (\alpha > 0). \tag{3.3.9}$$

Enfin, on note ρ^0 la donnée initiale, c'est-à-dire la valeur de ρ au temps $t = 0$ déduite en principe d'observations expérimentales.

3.3.4 — ÉQUATION DE FERMETURE POUR LA PRESSION SUPERFICIELLE

Le système constitué par les équations (3.3.6) (équation pour l'ECT), (3.3.7) (équation pour la densité) n'est pas un système fermé en raison de la présence de p_s qui est une troisième inconnue. La première idée consisterait à coupler ces équations avec les équations $(EP2, a, b, c)$ (équation pour $\overrightarrow{v}$, équation hydrostatique et approximation de Boussinesq) munies de viscosités turbulentes verticales. Cependant, la présence de p_s dans d'autres équations que $(EP2, a, b)$ interdit de la considérer comme un multipicateur de Lagrange comme dans le chapitre 2. Les résultats de régularité très faibles obtenus dans le chapitre 2 pour p_s (et donc les estimations à priori, *cf.* section 2.1.5, $p_s \in \mathcal{D}([0, \mathcal{T}], W^{-1,2}(\Gamma_s)))$ rend ce couplage très délicat qui débouche sur un problème ouvert.

On cherche une équation où p_s est présent et qui permet de garantir plus de régularité. Le fait que p_s ne dépende que de (x, y) fait penser à une équation bidimensionnelle. C'est pourquoi on moyenne l'équation pour $\overrightarrow{v}$ suivant la verticale en faisant ce que les spécialistes avertis ne manqueront sûrement pas d'appeler "l'approximation shalow water". Dans cette section on :

- (i) définit le filtre de moyenne verticale et on moyenne chaque terme de l'équation pour $\overrightarrow{v}$,
- (ii) modélise certains termes non linéaires interprétés comme des tensions de Reynolds,
- (iii) écrit une équation de conservation pour la moyenne de $\overrightarrow{v}$,
- (iv) écrit des conditions aux limites pour la moyenne.Ê

À partir de maintenant on prend pour simplifier $Ro = 1$, ce dernier n'étant pas destiné à tendre vers zéro dans cet essai même si on le considère petit mais fixé. On rappelle que le coefficient de Coriolis f est pris égal à 1 et on raisonne avec des quantités sans dimension.

• (i) *Filtre de moyenne et moyenne des termes.* Étant donnée h, on définit sa moyenne suivant la verticale en posant

$$\underline{h} \stackrel{def}{=} \frac{1}{H(x,y)} \int_{-H(x,y)}^{0} h \, dz \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(h). \tag{3.3.10}$$

Bien que ce filtre de moyenne ne satisfasse pas les hypothèses de la section 3.2.1, on s'en sert pour moyenner l'équation $(M1, a)$ satisfaite par $\overrightarrow{v}$ qui est l'équation de départ, dans laquelle on est revenu à la variable ρ à la place de T :

$$\begin{cases} \partial_t \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}\,\nabla)\,\overrightarrow{v} + W(\overrightarrow{v})\,\partial_z \overrightarrow{v} - \nu_h \Delta \overrightarrow{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \overrightarrow{v} + \\ \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v} + \nabla p_s + M(\nabla \rho) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\underline{\nabla p_s} = \nabla p_s, \quad \underline{\vec{k} \times \vec{v}} = \vec{k} \times \underline{\vec{v}}.$$

Par ailleurs, on écrit

$$\begin{cases} -\nu_h \mathcal{M}(\Delta \vec{v}) = -\nu_h \Delta \underline{\vec{v}} + \mathcal{R}_1(\vec{v}), \\ -\nu_v \mathcal{M}(\partial^2_{zz} \vec{v}) = -\dfrac{\nu_v}{H(x,y)}[\partial_z \vec{v} \mid_{\Gamma_s} - \partial_z \vec{v} \mid_{\Gamma_f}] = -\dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} + \mathcal{R}_2(\vec{v}), \\ \mathcal{M}((\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v}) = (\underline{\vec{v}}\nabla)\,\underline{\vec{v}} + \mathcal{R}_3(\vec{v}), \\ \mathcal{M}(M(\nabla\rho)) = \nabla \mathcal{M}(M(\rho)) + \mathcal{R}_4(\rho), \end{cases}$$

où l'on s'est servi de la condition aux limites $(M1, d)$. On pose

$$\mathcal{R}(\vec{v}, \rho) = \mathcal{R}_1(\vec{v}) + \mathcal{R}_2(\vec{v}) + \mathcal{R}_3(\vec{v}) + \mathcal{R}_4(\rho).$$

On obtient alors comme équation pour $\underline{\vec{v}}$:

$$(3.3.11) \qquad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\,\underline{\vec{v}} - \nu_h \Delta \underline{\vec{v}} + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) + \mathcal{R}(\vec{v}, \rho) = \dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s. \end{cases}$$

• (ii) *Termes aux tensions de Reynolds*. Le terme $\mathcal{R}(\vec{v})$ est traité comme un terme de tensions de Reynolds (bien qu'il ne le soit pas au sens strict du terme). On le modélise à l'aide d'une viscosité turbulente supposée constante dans ce travail, en posant

$$-\nu_h \Delta \underline{\vec{v}} + \mathcal{R}(\vec{v}, \rho) = -K_b \Delta \underline{\vec{v}}.$$

L'équation (3.3.11) devient

$$(3.3.12) \qquad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\,\underline{\vec{v}} - K_b \Delta \underline{\vec{v}} + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla\,(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s. \end{cases}$$

On appelle $\underline{\vec{v}}$ la *composante barotrope* de la vitesse. Ce champ est a priori défini sur $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$ où est posée l'équation (3.3.12).

• (iii) *Équation de conservation satisfaite par* $\underline{\vec{v}}$. Comme $\vec{v}$ satisfait la contrainte $div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0$, $\underline{\vec{v}}$ vérifie l'équation de conservation

$$(3.3.13) \qquad div(H\underline{\vec{v}}) = 0.$$

Par la suite, on fait l'hypothèse simplificatrice

$$(3.3.14) \qquad div\underline{\vec{v}} = 0.$$

bien que l'on conjecture que les résultats obtenus dans le chapitre 6 restent vrais si l'on utilise (3.3.13) au lieu de (3.3.14) qui suppose le fond plat.

• (iv) *Conditions aux limites*. Il est généralement admis que les côtes sont des lignes de champ pour $\underline{\vec{v}}$, ce qui implique

$$\underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}= 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_s. \tag{3.3.15}$$

Puisque cette condition est insuffisante à la résolution de (3.3.12), on y rajoute la condition d'imperméabilité

$$rot\underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{sur } \partial\Gamma_s, \tag{3.3.16}$$

utilisée dans les codes numériques calculant $\underline{\vec{v}}$ (*cf.* DELECLUSE [2]). ♢

On termine ce paragraphe par quelques remarques.

REMARQUE 3.3.2 — On pose pour n'importe quelle quantité scalaire f,

$$Rot(f) \stackrel{def}{=} (\partial_y f)\ \vec{e}_1 - (\partial_x f)\ \vec{e}_2\ .$$

De même pour un champ $\vec{v} =\ u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2$, on pose

$$rot\vec{v} \stackrel{def}{=}\ \partial_x v - \partial_y u.$$

La relation

$$Rot(rot) = -\Delta + \nabla(div)$$

combinée à l'équation de conservation (3.3.14) permet de remplacer le terme de diffusion $-K_b\Delta\underline{\vec{v}}$ dans l'équation pour $\underline{\vec{v}}$, (3.3.12) par $K_b Rot(rot\underline{\vec{v}})$. Finalement, cette équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t\underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\,\underline{\vec{v}} + K_b Rot(rot\underline{\vec{v}}) +\ \vec{k}\ \times\underline{\vec{v}} + \\ \nabla\left(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)\right) =\ \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{ dans } [0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s, \end{cases} \tag{3.3.17}$$

qui est l'équation retenue à partir de maintenant. ♢

REMARQUE 3.3.3 — La vorticité barotrope $\underline{\omega}$ est définie par

$$\underline{\omega} \stackrel{def}{=} rot\underline{\vec{v}} = \partial_x\underline{v}_y - \partial_y\underline{v}_x, \tag{3.3.18}$$

avec $\underline{\vec{v}} = \underline{v}_x\,\vec{e}_1 + \underline{v}_y\,\vec{e}_2$. On note les deux point suivants.
1) Comme $\underline{\vec{v}}$ est à divergence nulle définie sur un domaine bidimensionnel, il existe une fonction de courant $\underline{\varphi}$ telle que

$$\underline{\vec{v}} = Rot(\underline{\varphi}). \tag{3.3.19}$$

2) La vorticité barotrope $\underline{\omega}$ vérifie dans $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$,

$$\partial_t \omega + \underline{\vec{v}}.\nabla \underline{\omega} - K_b \Delta \underline{\omega} = rot(\frac{1}{H(x,y)} \vec{\mathrm{v}}). \tag{3.3.20}$$ ♢

Le travail de modélisation de ce chapitre est terminé. On a défini les variables propres à l'étude de la turbulence et écrit les équations qu'elles satisfont. Après avoir mis en évidence la difficulté pouvant intervenir dans l'analyse du couplage de ces équations avec les équations primitives, on a poursuivi la modélisation pour obtenir les équations géostrophiques pour ρ et k et l'équation barotrope pour $\underline{\vec{v}}$. Il reste à faire la synthèse des systèmes déduits de ce travail de modélisation.

3. 4 — SYNTHÈSE DES MODÈLES COUPLÉS

3.4.1 — ORIENTATION

D'une manière générale, les deux paragraphes précédents montrent que l'analyse de la turbulence verticale conduit à coupler une ou deux équations de fermeture (équation pour k, $(3.2.16)$ et $(3.3.6)$, ou système (k, ε), $(3.2.20)$) avec les autres équations du système pour des quantités moyennes au travers des viscosités turbulentes calculées dans la section 3.2.6. On distingue deux orientations principales :

- l'étude du couplage de l'équation de fermeture pour k avec les équations primitives,
- l'étude du couplage de l'équation de fermeture pour k avec le système géostrophico-barotrope.

Cependant, il faut étudier sur le plan mathématique les problèmes suivant une difficulté croissante. C'est pourquoi l'énumération suivante ne suit pas l'ordre des raisonnements faits au cours du travail de modélisation des paragraphes précédents, mais l'ordre dans lequel on les étudie dans la suite de ce livre. On commence par analyser

- l'équation pour l'ECT $(3.2.16)$ lorsque $\vec{v} \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ et $\rho \in H^1_{f,l}(\Omega)$ sont fixés,
- le couplage d'équations scalaires $(3.3.6)$ et $(3.3.7)$ sans termes de transport et avec (k, ρ) pour inconnues.

L'équation pour k lorsque $\vec{v} \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ et $\rho \in H^1_{f,l}(\Omega)$ sont fixés fait l'objet du chapitre 4 et le couplage d'équations scalaires (k, ρ) du chapitre 5. Le chapitre 6 est consacré aux “gros" systèmes turbulents. Dans les sections suivantes, on fait la liste des systèmes classés suivant leur ordre de difficulté.

On rappelle que les opérateurs intervenants dans les équations sont définis pour tout

$h \in C^1(\Omega)$ par

$$\begin{cases} M(h)(x,y,z) = \displaystyle\int_z^0 h(x,y,z')\,dz', \\ \tilde{M}(h)(x,y) = M(h)(x,y,-H(x,y)) = \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 h(x,y,z')\,dz', \\ \mathcal{M}(h)(x,y) = \dfrac{1}{H(x,y)}\tilde{M}(h)(x,y) = \dfrac{1}{H(x,y)}\displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 h(x,y,z')\,dz'. \end{cases}$$

Par ailleurs, le champ géostrophique est défini pour tout $(p_s,\rho) \in C^1(\Gamma_s) \times C^1(\Omega)$ par

$$\vec{U}_g\,(p_s,\rho) = U_g(p_s,\rho)\,\vec{e}_1 + V_g(p_s,\rho)\,\vec{e}_2,$$

avec

$$\begin{cases} U_g(p_s,\rho) = -M(\partial_y\rho) - \partial_y p_s, \\ V_g(p_s,\rho) = M(\partial_x\rho) + \partial_x p_s. \end{cases}$$

Les viscosité verticales turbulentes $\nu_t(k)$, $\mu_t(k)$ et $\nu_v^t(k)$ dans tous les systèmes sont des fonctions continues de k. La viscosité ν_t est minorée par $\nu > 0$ et μ_t et ν_v^t sont minorées par 0, nulles en 0. D'une manière générale, on aura à les supposer bornées. Enfin la tension du vent $\vec{\mathrm{v}}$ est une fonction fixée définie sur Γ_s et supposée stationnaire pour simplifier. Sa régularité est fixé système par système et résultat par résultat (*cf.* chapitres 5 et 6).

Dans tous les systèmes,

— $K_h > 0$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et $\nu > 0$ sont des constantes,
— ρ^0, k_0, $\vec{v}_0$ et $\underline{\vec{v}}_0$ sont les données initiales.

3.4.2 — MODÈLE COUPLÉ D'ÉQUATIONS SCALAIRES : SYSTÈME $(M3)$

Les raisonnements effectués dans la section 3.3.2 montrent qu'en filtrant le champ des vitesses par le champ géostrophique, l'ECT k n'est couplée qu'à la densité ρ et à la pression superficielle p_s qui n'intervient que dans le terme de transport. On a écrit dans la section 3.3.3 une équation pour la densité (équation (3.3.7)). En ne prenant pas en compte le terme de transport dans cette dernière équation, on obtient le système couplé (k,ρ) noté $(M3)$ avec (ρ,k) pour inconnue

$$(M3) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ (b) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho\,|^2 - k\,\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\,\partial_z\rho, \end{cases} \\ (c) & \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \\ (d) & k|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{\,\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \\ (e) & (\rho,k)|_{t=0} = (\rho^0,k_0). \end{cases}$$

Les conditions aux limites pour k sont étudiées dans la section 3.2.5 (*cf.* les formules (3.2.11)), celles pour ρ dans la section 3.3.3. Le problème est posé dans le domaine $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$.
En supposant $(\rho^0,k_0)\in L^2(\Omega)\times L^1(\Omega)$, on montre dans le chapitre 5 :

- un résultat d'existence d'une solution faible (ρ,k) à ce système avec $k\geq 0$ p.p. dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ lorsque μ_t est une fonction bornée de k, F est sous linéaire, ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée et $\vec{\mathrm{v}}\in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_s)$ ou bien $\vec{\mathrm{v}}=0$ et ν_t satisfait une hypothèse de croissance,
- un résultat d'existence d'une solution renormalisée (ρ,k) à ce système dans le cas stationnaire avec $k\geq 0$ p.p. dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ lorsque $\vec{\mathrm{v}}=0$, $\nu_t=\nu+\mu_t$, F ne dépend pas de ρ et ce, en supposant juste ν_t continue minorée par $\nu>0$.

3.4.3 — COUPLAGES AVEC LES ÉQUATIONS PRIMITIVES : SYSTÈMES $(M4)$ et $(M5)$

Les systèmes considérés sont consituées par

— les équations $(EP2,a,b,c)_m$ de la section (3.2.1) où l'on a remplacé T par ρ,
— l'équation (3.3.7) pour la densité ρ dans laquelle on remplace le terme de transport géostrophique par le terme de transport usuel sans filtrage,
— l'équation (3.2.16) pour k.Ê

Les conditions aux limites sont données par $(CL2,a,b)_m$, (3.2.12) et (3.3.9). En intégrant l'équation hydrostatique $(EP2,d)_m$ suivant la verticale puis en utilisant le lemme 1.6.2 (contrainte délocalisée), on obtient le système $(M4)$ avec $(\vec{v},p_s,\rho,k)$ pour inconnue et posé dans le domaine $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ (avec $Ro=1$),

$$
(M4)\quad
\begin{cases}
(a) & \begin{cases} \partial_t\vec{v}+(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{v}-\nu_h\Delta\vec{v}\;- \\ \partial_z((\nu_v^t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v})+\vec{k}\times\vec{v}+\nabla p_s+M(\nabla\rho)=0, \end{cases}\\
(b) & div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0}\vec{v}\,dz)=0,\\
(c) & \begin{cases} \partial_t\rho+\,(\vec{v}\,\nabla)\,\vec{\rho}+W(\vec{v})\,\partial_z\vec{\rho}-\mathcal{K}_h\Delta\rho- \\ \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho)=F(\rho), \end{cases}\\
(d) & \begin{cases} \partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)\;= \\ \nu_v^t(k)\,|\partial_z\vec{v}\,|^2-k\sqrt{|\,k\,|}+\mu_t(k)\,\partial_z\rho, \end{cases}\\
(e) & (\nu_v^t(k)+\nu_v)\,\partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s}=\vec{\mathrm{v}},\quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\
(f) & (\mu_t(k)+\nu)\partial_z\rho|_{\Gamma_s}=-\alpha\,\rho,\quad \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0,\\
(g) & k|_{\Gamma_s}=m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|,\quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\\
(h) & (\vec{v},\rho,k)|_{t=0}=(\vec{v}_0,\rho^0,k_0).
\end{cases}
$$

Les conditions aux limites pour ρ et k sont les mêmes que dans le système $(M3)$. Celles pour $\vec{v}$ sont les conditions usuelles (*cf.* la remarque 3.1.1 dans la section 3.2.1).

On n'est pas en mesure de montrer un résultat d'existence au système $(M4)$, ce qui constitue un problème ouvert. On montre dans le chapitre 6 qu'une suite de solutions à ce système converge vers une limite satisfaisant un système dont toutes les équations sont celles du système $(M4)$ sauf l'équation pour l'ECT $(M4, d)$ où apparait à la limite une mesure positive dans le second membre qui n'a aucune raison d'être nulle. La difficulté vient du manque d'égalité d'énergie à cause des termes de transport dans $(M4, a)$. On ne sait pas passer à la limite dans le terme de production $|\partial_z \vec{v}\,|^2$ présent dans l'équation pour l'ECT. Pour cette raison, on introduit le système approché $(M5)$ avec un terme de transport tronqué, posé dans le domaine $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$

$$
(M5) \qquad \begin{cases}
(a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + B_j(\vec{v}) - \nu_h \Delta \vec{v} - \partial_z((\nu_v^t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}) + \\ \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s + M(\nabla\rho) = 0, \end{cases} \\
(b) & div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\; dz) = 0, \\
(c) & \partial_t \rho + C_j(\vec{v}, \rho) - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \\
(d) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\partial_z \vec{v}\,|^2 - k\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\,\partial_z \rho. \end{cases} \\
(e) & (\nu_v^t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(f) & (\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\
(g) & k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(h) & (\vec{v}, \rho, k)|_{t=0} = (\vec{v}_0, \rho^0, k_0).
\end{cases}
$$

Les termes de transport tronqués $B_j(\vec{v})$ et $C_j(\vec{v}, \rho)$ sont définis dans la section 2.3.3 du chapitre 2, définition 2.3.2, formules (2.3.4). On montre dans le chapitre 6 l'existence d'une solution faible $(\vec{v}, \rho, k, p_s)$ à ce système, avec $k \geq 0$ p.p. dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$, lorsque

— $j > 0$ est fixé,
— $(\vec{v}_0, \rho^0, k_0) \in \mathcal{Q}_{oc}^{0,2} \times L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$,
— les fonctions ν_v^t et μ_t sont des fonctions positives continues bornées,
— $\vec{\mathrm{v}} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée ou
bien $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait la condition de croissance
$\nu_t(k) \leq C(1 + |k|^\theta), \quad \theta \in [0, 2/3[$,
— F est continue et sous linéaire.

3.4.4 — SYSTÈME GÉOSTROPHICO BAROTROPE TURBULENT $(M6)$

On réunit l'ensemble des équations obtenues dans le paragraphe 3.3. Les équations sont :

- l'équation (3.3.6) pour k,
- l'équation (3.3.7) pour ρ avec le terme de transport géostrophique,
- l'équation de fermeture (3.3.17) pour p_s et la composante barotrope $\underline{\vec{v}}$ avec la contrainte (3.3.14).

Les conditions aux limites pour $\underline{\vec{v}}$ sont les conditions (3.3.15) et (3.3.16), celles pour ρ et k les conditions (3.2.12) et (3.3.9). Le système obtenu est $(M6)$ avec $(\underline{\vec{v}}, \rho, k, p_s)$ comme inconnue,

$$
(M6) \quad \left\{
\begin{array}{ll}
(a) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + \ K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k}\, \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{array} \right. \\
(b) & div\underline{\vec{v}} = 0, \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\
(c) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho) = \\ F(\rho), \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \end{array} \right. \\
(d) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2 + \ \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{|\,k\,|} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \end{array} \right. \\
(e) & rot\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\ |_{\partial\Gamma_s} = 0, \\
(f) & (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\Gamma_s}, \quad \rho|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \\
(g) & k|_{\Gamma_s} = m_b|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0, \\
(h) & (\underline{\vec{v}}, \rho, k)|_{t=0} = (\underline{\vec{v}}_0, \rho^0, k_0).
\end{array}
\right.
$$

Ce système est analysé en détail dans le chapitre 6 dans lequel on montre l'existence d'une solution faible

$$
\left\{ \begin{array}{l} (\underline{\vec{v}}, \rho, p_s, k) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], H^2(\Gamma_s)) \times L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega) \times \\ L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega) \times \displaystyle\bigcap_{p\in[1,3/2[} L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)), \end{array} \right.
$$

lorsque

— H est de classe C^1 et F est continue sous linéaire,
— $(\underline{\vec{v}}_0, \rho^0, k_0) \in H^2(\Gamma_s) \times L^\infty(\Omega) \times L^1(\Omega)$,
— μ_t et ν_v^t sont des fonctions positives continues bornées,
— $\vec{\mathrm{v}} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée ou bien $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait la condition de croissance $\nu_t(k) \leq C(1 + |k|^\theta), \quad \theta \in [0, 2/3[$,
— $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ est “petite" ou les viscosités $\mathcal{K}_h$ et ν sont “grandes".

Dans ce problème, p_s n'est pas un multiplicateur de Lagrange mais solution d'un problème de point fixe.

3.4.5 — SYSTÈMES À DEUX ÉQUATIONS DE FERMETURE

Les systèmes précédents sont des systèmes avec une équation de fermeture. On est dans le cas où la longueur de mélange ℓ est constante (*cf.* section 3.2.6). On peut également écrire des systèmes avec deux équations de fermeture, une pour k et une pour ε (système $(3.2.19)$) d'où l'on déduit le calcul de ℓ à l'aide de la formule $(3.2.12)$ qui relie k, ℓ et ε. Il est possible de réécrire chaque modèle avec deux équations au lieu de une. On se limite ici à écrire celui correspondant au système scalaire. Le système $(M7)$ admet (ρ, k, ε) pour inconnue et est posé dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$,

$$(M7) \quad \begin{cases} (a) \quad \partial_t \rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k,\varepsilon) + \nu)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \\ (b) \quad \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) \; = \\ \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\nabla\rho|^2 + \mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \varepsilon, \end{cases} \\ (c) \quad \partial_t \varepsilon - \lambda\Delta\varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\varepsilon) = k|\nabla\rho|^2 + \dfrac{\varepsilon}{k}\,\mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \dfrac{\varepsilon^2}{k}, \\ (d) \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k,\varepsilon) + \nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \\ (e) \quad k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\overrightarrow{\mathrm{v}}|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (f) \quad \varepsilon|_{\Gamma_s} = \varepsilon_a, \quad \varepsilon|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (e) \quad (\rho, k, \varepsilon)|_{t=0} = (\rho^0, k_0, \varepsilon_0). \end{cases}$$

Les viscosités turbulentes sont calculées à l'aide de la formule $(3.2.19)$. Les conditions aux limites pour ε ont été établies dans la section 3.2.6. Ce système n'est pas résolu car on n'a pas d'estimations portant sur k et ε, ce qui constitue un problème ouvert. C'est pourquoi on le remplace par le système tronqué $(M8)$

$$(M8) \quad \begin{cases} (a) \quad \partial_t \rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k,\varepsilon) + \nu)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \\ (b) \quad \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) \; = \\ \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\nabla\rho|^2 + \mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \varepsilon, \end{cases} \\ (c) \quad \begin{cases} \partial_t \varepsilon - \lambda\Delta\varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\varepsilon) \; = \\ \beta_j(k)|\nabla\rho|^2 + \dfrac{\varepsilon}{\gamma_j(k)}\,\mu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z\rho - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma_j(k)}, \end{cases} \end{cases}$$

$$(M8) \quad \begin{cases} (d) \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k,\varepsilon) + \nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \\ (e) \quad k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\overrightarrow{\mathrm{v}}|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (f) \quad \varepsilon|_{\Gamma_s} = \varepsilon_a, \quad \varepsilon|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (e) \quad (\rho, k, \varepsilon)|_{t=0} = (\rho^0, k_0, \varepsilon_0), \end{cases}$$

où β_j est la fonction de troncature définie dans la section 2.2.2, définition 2.2.1, formule $(2.2.1)$. La fonction γ_j est la fonction définie par

$$\begin{cases} \forall\, x\,; \quad |x| \geq \dfrac{1}{j}, \quad \gamma_j(x) = x, \\ \forall\, x\,; \quad |x| \leq \dfrac{1}{j}, \quad x \neq 0, \quad \gamma_j(x) = \dfrac{x}{j\,|x|}, \quad \gamma_j(0) = \dfrac{1}{j}. \end{cases}$$

La structure de $(M8)$ est voisine de celle de $(M3)$. Aussi on se limitera à indiquer dans des remarques ce qu'il faut faire en plus par rapport à l'analyse de $(M3)$ pour obtenir un résultat d'existence à $(M8)$.
On peut de même considérer des systèmes d'équations primitives ou des systèmes géostrophico-barotropes couplés avec deux équations de fermeture.

Dans la troisième partie on étudie $(M3)$, $(M4)$, $(M5)$ et $(M6)$. Pour cela, il faut d'abord analyser l'équation pour l'ECT $(3.2.16)$ (ou $(3.3.6)$) lorsque la densité et la vitesse horizontale sont des fonctions fixées. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE L'ÉQUATION POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE

ORIENTATION

1) Tous les modèles obtenus à l'issue du chapitre 3 contiennent l'équation satisfaite par l'ECT k dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$

$$(4.0.1) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 + \mu_t(k)\, \partial_z \rho - k\sqrt{k}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = m_b\, |\, \vec{\mathrm{v}}\, |, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0, \end{cases}$$

ou avec $|\nabla \rho|^2$ à la place de $|\, \partial_z \vec{v}\, |^2$. Le but principal de ce chapitre est la mise en place des outils techniques nécessaires à la compréhension de la structure de l'équation (4.0.1) pour l'étude ultérieure des systèmes couplés. On l'analyse en détail lorsque $(\vec{v}, \rho) \in L^2([0, \mathcal{T}], [H^1(\Omega)]^3)$ est fixé et $k_0 \in L^1(\Omega)$.

2) Dans l'équation pour l'ECT (4.0.1), λ est une constante, ν_t, ν_v^t et μ_t sont des fonctions continues de k. Dans toute la suite de cet ouvrage, on fait l'hypothèse

$$(4.0.2) \qquad \begin{cases} (a) & \forall\, k \in I\!R, \quad 0 < \nu \leq \inf(\nu_t(k), \lambda), \\ (b) & \nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0, \quad \forall\, k \in I\!R, \quad 0 \leq \inf(\nu_v^t(k), \mu_t(k)). \end{cases}$$

Indépendamment du problème de la donnée initiale, cette équation présente trois difficultés.

- Le terme $-k\sqrt{k}$ n'a a priori aucune raison d'être défini.
- Il faut donner un sens au terme de diffusion $\partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k)$.
- Le terme $|\, \partial_z \vec{v}\, |^2$ est a priori dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$.

3) À cause du terme $-k\sqrt{k}$, on remplace l'équation pour l'ECT par la nouvelle équation

$$(4.0.3) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 + \mu_t(k)\, \partial_z \rho - k\sqrt{|k|}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = m_b\, |\, \vec{\mathrm{v}}\, |, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

On montre à la fin de ce chapitre en utilisant le principe du maximum que dès que $k_0 \geq 0$ p.p. dans Ω, l'équation $(4.0.3)$ admet une solution positive p.p. dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$. Cette solution est donc aussi une solution de $(4.0.1)$, ce qui contourne la difficulté due au terme $-k\sqrt{k}$.

4) On commence par étudier le cas homogène, *i.e.* $\overrightarrow{\mathrm{v}} = 0$. Le résultat principal montré dans ce chapitre est le théorème 4.0.1.

THÉORÈME 4.0.1 — *On suppose que*

> *i) le couple* $(\overrightarrow{v}, \rho)$ *est fixé dans* $L^2([0, \mathcal{T}], [H^1(\Omega)]^3)$,
> *ii)* $k_0 \in L^1(\Omega)$, $k_0 \geq 0$ *p.p. dans* Ω,
> *iii) les viscosités* ν_t, ν_v^t *et* μ_t *sont des fonctions continues de* k *et vérifient* $(4.0.2)$
> *iv) les viscosités* ν_v^t *et* μ_t *sont bornées et la viscosité* ν_t *vérifie*
>
> $$\nu_t(k) \leq C(1 + |k|^\theta), \quad \theta \in [0, 2/3[.$$

Alors, le problème $(4.0.3)$ *avec* $\overrightarrow{\mathrm{v}} = 0$ *possède une solution* k *au sens des distributions telle que pour tout* $p \in [1, 3/2[$, $k \in L^p([0, \mathcal{T}], L^p([0, \mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ *et* $k \geq 0$ *presque partout dans* $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$. $\diamondsuit$

Il faut noter que la condition de croissance *iv)* portant sur ν_t est satisfaite par la viscosité modélisée dans le chapitre 3 (*cf.* (3.2.15)). Le problème où ν_v^t et μ_t ne sont pas bornées est un problème ouvert. On montre cependant dans le chapitre 5 un résultat d'existence d'une solution renormalisées à $(M3)$ dans le cas stationnaire lorsque $\nu_v^t = \mu_t = \nu_t - \nu$ et sans hypothèse de croissance.

On montre le théorème 4.0.1 par la méthode de compacité habituelle. On construit des approximations puis on passe à la limite après avoir obtenu les estimations nécessaires.

Les approximations de l'équation $(4.0.3)$ sont construites en deux étapes.

- On régularise le second membre pour se ramener au cas où le terme dans l'espace $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ est remplacé par un terme régulier, on tronque la donnée initiale et la viscosité dans le terme de diffusion (*cf.* section 4.1.1).
- On construit des approximations par une méthode de temps de retard pour palier en partie à la difficulté due au terme de diffusion non linéaire (*cf.* section 4.1.2).

On passe ensuite à la limite lorsque le pas de temps de retard tend vers 0 puis lorsque le second membre régularisé tend vers une fonction dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Pour ce dernier passage à la limite, on obtient des estimations dans $L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$ (pour tout $p < 3/2$) pour les suites de solutions approchées en utilisant un résultat de BOCCARDO-GALLOUET [1] redéveloppé dans la section 4.2.1, ce qui règle la difficulté due au second membre dans L^1. En résumé, les deux articulations principales de la démonstration du théorème 4.0.1 sont :

• régularisation et approximations par une méthode de temps de retard (§4.1),
• obtention d'estimations dans $L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$ $(p<3/2)$ puis passage à la limite dans l'équation (§4.2).

On généralise en fin de chapitre ce résultat au cas du système (k,ε) (section 4.5, théorème 4.5.1).

5) Enfin, on étudie le cas $\vec{\mathrm{v}}\neq 0$ en effectuant un relèvement de la condition aux limites et en se ramenant à un cas homogène. L'obtention d'estimations avec les techniques utilisées exige que ν_t soit dérivable de dérivée bornée et que $\vec{\mathrm{v}}$ soit dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_s)$. On n'arrive pas à “faire mieux" dans ce travail. Le résultat obtenu est le théorème 4.0.2.

THÉORÈME 4.0.2 — *On suppose que*

> *(i) le couple* $(\vec{v},\rho)$ *est fixé dans* $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$*,*
> *(ii)* $k_0\in L^1(\Omega)$*,* $k_0\geq 0$ *p.p. dans* Ω*,*
> *(iii)* $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$*,*
> *(iv)* ν_t *est bornée dérivable de dérivée bornée,* ν_v^t *et* μ_t *sont continues bornées et* $(4.0.2)$ *est satisfait.*

Alors, le problème $(4.0.3)$ *possède une solution* k *au sens des distributions telle que pour tout* $p\in[1,3/2[$*,* $k\in L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$ *et* $k\geq 0$ *p.p. dans* $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$. ♢

4. 1 — CONDITIONS HOMOGÈNES : APPROXIMATIONS

4.1.1 — RÉGULARISATION DU SECOND MEMBRE ET DE LA DONNÉE INITIALE

Le couple $(\vec{v},\rho)\in L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$ est fixé. On construit dans ce paragraphe des approximations à l'équation $(4.0.3)$.

On commence par régulariser le second membre de $(4.0.3)$ par convolution, la donnée initiale et la viscosité par troncature.

Les hypothèses sont :

> (i) ν_v^t et μ_t sont des fonctions continues bornées minorées par 0,
> (ii) ÃÐν_t est une fonction continue minorée par $\nu>0$,
> (iii) $\vec{\mathrm{v}}=0$,
> (iv) $k_0\in L^1(\Omega)$, $k_0\geq 0$ dans Ω p.p.

Soit $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de noyaux régularisants, c'est-à-dire une suite de fonctions positives à support compact, de classe C^∞ définies sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ et telle que

$$\begin{cases}\forall\, j\in\mathbb{N}, & supp(\eta_j)\subset\left[-\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{j}\right]\times B\left(O,\dfrac{1}{j}\right),\\ \forall\, j\in\mathbb{N}, & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\eta_j\,dM dt=1.\end{cases}$$

On note $\star$ le produit de convolution usuel et on pose

$$f_j \stackrel{def}{=} |\,\partial_z \vec{v}\,|^2 \star \eta_j, \quad g_j \stackrel{def}{=} \partial_z \rho \star \eta_j. \tag{4.1.1}$$

Pour j fixé, soit

$$H_j(t, M, k) \stackrel{def}{=} \nu_v^t(k)\, f_j + \mu_t(k)\, g_j - \beta_j(k\sqrt{|k|}), \tag{4.1.2}$$

où β_j est la fonction de troncature à hauteur j (*cf.* section 2.2.2, chapitre 2). On note que la fonction H_j est une fonction

— continue par rapport à (t, M, k),
— bornée.

Enfin, les résultats classiques sur le produit de convolution montrent que (*cf.* BRÉZIS [1])

$$\begin{cases} \forall\, k \in L^{\frac{3}{2}}([0, \mathcal{T}] \times \Omega), \\ \lim\limits_{j\to\infty} H_j(t, M, k) = \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{|k|} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ fort. La régularité requise sur k dans ce qui précède est due au terme $k\sqrt{|k|}$ qui est dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ lorsque $k \in L^{\frac{3}{2}}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Les estimations de la section 4.2 donnent bien cette régularité, voire beaucoup mieux.

L'équation $(4.1.4)$ plus bas est la première approximation de l'équation $(4.0.1)$ dans laquelle on régularise le second membre, on tronque la donnée initiale et la viscosité dans le terme de diffusion

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k))\,\partial_z k) = H_j(t, M, k), \\ (b) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0). \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Pour conserver l'inégalité

$$\forall\, k \in I\!R, \quad \nu \le \beta_j(\nu_t(k)),$$

on impose $j > \nu$. Il faut donner un sens faible à $(4.1.4)$.

Définition 4.1.1 — *On dit que* $k \in L^2([0, \mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ *est une solution faible de l'équation* $(4.1.4)$ *si* $\partial_t k \in L^2([0, \mathcal{T}], H^{-1}(\Omega))$ *et si pour tout* q *dans l'espace* $L^2([0, \mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ *et pour tout* $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$< \partial_t k, q > +\lambda \int_0^t \int_\Omega \nabla k.\nabla q + \int_0^t \int_\Omega \beta_j(\nu_t(k))\,\partial_z k.\,\partial_z q = \int_0^t \int_\Omega H_j(t, M, k)\, q,$$

et $k|_{t=0} = \beta_j(k_0)$. *Les crochets de dualité sont ceux entre* $L^2([0, t], H^{-1}(\Omega))$ *et* $L^2([0, t], H_0^1(\Omega))$.*ÃĐ* $\diamondsuit$

THÉORÈME 4.1.1 — *Lorsque j est fixé, l'équation* $(4.1.4)$ *admet une solution faible* $k \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$. ♢

D'ici la fin de ce paragraphe on aura montré entièrement le théorème 4.1.1. Dans le paragraphe 4.2, on étudie le problème de faire tendre j vers l'infini dans l'équation $(4.1.4)$.

4.1.2 — MÉTHODE DU TEMPS DE RETARD

Dans cette section, $j > \nu$ est fixé. Le principe de la méthode du temps de retard consiste à linéariser l'équation $(4.1.4)$ en calculant une partie des termes non linéaires avec un léger décalage en temps. On a besoin au préalable d'une définition abstraite.

Définition 4.1.2 — *Soient X un espace de Banach quelconque, $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{T}' > 0$. Pour $u \in L^p([0,\mathcal{T}'], X)$ pour un réel $\tau \in]0, \mathcal{T}']$, on pose*

$$\begin{cases} \forall\, t \in [\tau, \mathcal{T}'], \quad \pi_{(\tau,\mathcal{T}')}(u)(t) \stackrel{def}{=} u(t-\tau) \\ \forall\, t \in [0, \tau], \quad \pi_{(\tau,\mathcal{T}')}(u)(t) \stackrel{def}{=} u(0). \end{cases} \tag{4.1.5}$$

On appelle $\pi_{(\tau,\mathcal{T}')}$ la fonction de retard de pas τ sur $[0, \mathcal{T}']$. ♢

LEMME 4.1.1 — *Soit $u \in L^p([0,\mathcal{T}'], X)$. Alors,*

$$\lim_{\tau \to 0} \pi_{(\tau,\mathcal{T}')}(u) = u$$

dans $L^p([0,\mathcal{T}'], X)$ fort. ♢

Ce lemme est prouvé dans LEWANDOWSKI ÃĐ[4] ainsi que le lemme 4.1.2 ci-dessous qui donne les trois propriétés triviales de la fonction de retard utiles par la suite.

LEMME 4.1.2 — *i) Si u est juste définie sur $[0, \mathcal{T}' - \tau]$, la fonction $\pi_{(\tau,\mathcal{T}')}(u)$ a un sens,*

ii) pour tout $u \in L^p([0,\mathcal{T}'], X)$, $\pi_{(\mathcal{T}',\mathcal{T}')}(u) = u(0)$,

iii) si $0 < \tau < \mathcal{T}' < \mathcal{T}''$, $\forall\, u \in L^p([0,\mathcal{T}''], X)$, $\pi_{(\tau,\mathcal{T}')}(u) = \pi_{(\tau,\mathcal{T}'')}(u)$ sur l'intervalle de temps $[0, \mathcal{T}']$. ♢

Le but de la section présente est d'approcher l'équation $(4.1.4)$ par

$$\begin{cases} (a) \quad \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_{(\tau_n,\mathcal{T})}(k)))\, \partial_z k) = \\ H_j(t, M, \pi_{(\tau_n,\mathcal{T})}(k)), \end{cases} \\ (b) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0), \end{cases} \tag{4.1.6}$$

avec

$$\tau_n \stackrel{def}{=} \frac{\mathcal{T}}{n}. \tag{4.1.7}$$

THÉORÈME 4.1.2 — *Soit* $n > 0$ *un entier donné. L'équation* (4.1.6) *possède une unique solution faible* $k^n \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — La solution de (4.1.6) est construite pas à pas, d'abord sur l'intervalle de temps $[0,\tau_n]$ puis sur $[0,2\tau_n]$ et ainsi de suite. Pour simplifier, on pose

$$\forall\, \alpha = 1, ..., n, \quad \pi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \pi_{(\tau_n, \alpha\tau_n)}$$

et on fait une récurrence sur l'entier α.

1) *cas* $\alpha = 1$. Soit $k^1 \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ l'unique solution faible (*cf.* la définition 4.1.1) de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t k^1 - \lambda\Delta k^1 - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\beta_j(k^0)))\,\partial_z k^1) = H_j(t, M, \beta_j(k^0)) \\ \text{dans } [0,\tau_n]\times\Omega, \\ k^1|_{t=0} = \beta_j(k^0). \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de k^1 sont assurées par les résultat dans LIONS [1], l'existence car

$$\beta_j(k_0) \in L^\infty(\Omega), \quad H_j(t, M, \beta_j(k^0)) \in L^\infty([0,\tau_n]\times\Omega),$$

l'unicité car l'équation satisfaite par k^1 est linéaire et la donnée au bord homogène. Notons que k^1 satisfait

$$\partial_t k^1 - \lambda\Delta k^1 - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_1(k^1)))\,\partial_z k^1) = H_j(t, M, \pi_1(k^1))$$

dans $[0,\tau_n]\times\Omega$.

2) *passage de* α *à* $\alpha+1$. Soit α un entier fixé entre 1 et $n-1$. Supposons qu'il existe un unique $k^\alpha \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t k^\alpha - \lambda\Delta k^\alpha - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_\alpha(k^\alpha)))\,\partial_z k^\alpha) = H_j(t, M, \pi_\alpha(k^\alpha)), \\ \text{dans } [0,\alpha\tau_n]\times\Omega, \\ k^\alpha|_{t=0} = \beta_j(k^0). \end{cases}$$

Soit $k^{\alpha+1}$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t k^{\alpha+1} - \lambda\Delta k^{\alpha+1} - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_{\alpha+1}(k^\alpha)))\,\partial_z k^{\alpha+1}) = \\ H_j(t, M, \pi_{\alpha+1}(k^\alpha)), \qquad \text{dans } [0,(\alpha+1)\tau_n]\times\Omega, \\ k^{\alpha+1}|_{t=0} = \beta_j(k^0). \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de $k^{\alpha+1}$ sont assurées grâce au même argument qu'en 1).

D'après le lemme 4.2.1, $\pi_{\alpha+1}(k^\alpha)$ est définie sur l'intervalle de temps $[0,(\alpha+1)\tau_n]$ et on a

$$\pi_{\alpha+1}(k^\alpha) = \pi_\alpha(k^\alpha)$$

sur l'intervalle $[0, \alpha\tau_n]$. Par conséquent, $k^{\alpha+1}$ est solution de la même équation que k^α sur l'intervalle de temps $[0, \alpha\tau_n]$. L'unicité de k^α et $k^{\alpha+1}$ permet de conclure que

$$k^\alpha = k^{\alpha+1} \quad \text{dans} \quad [0, \alpha\tau_n] \times \Omega.$$

En particulier, toujours d'après le lemme 4.2.1

$$\pi_{\alpha+1}(k^\alpha) = \pi_{\alpha+1}(k^{\alpha+1})$$

dans $[0, (\alpha+1)\tau_n] \times \Omega$. Par conséquent, $k^{\alpha+1}$ est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t k^{\alpha+1} - \lambda\Delta k^{\alpha+1} - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_{\alpha+1}(k^{\alpha+1})))\,\partial_z k^{\alpha+1}) = \\ H_j(t, M, \pi_{\alpha+1}(k^{\alpha+1})), \qquad \text{dans } [0, (\alpha+1)\tau_n] \times \Omega, \\ k^{\alpha+1}|_{t=0} = \beta_j(k^0). \end{cases}$$

La récurrence s'arrête lorsque $\alpha = n$, achevant la preuve du théorème 4.1.2. $\diamondsuit$

4.1.3 — PASSAGE À LA LIMITE LORSQUE LE PAS DE TEMPS TEND VERS 0

Pour pouvoir montrer le théorème 4.1.1 on passe à la limite dans le problème (4.1.6) lorsque n tend vers ∞, c'est-à-dire lorsque le pas de la discrétisation en temps de la section précédente tend vers 0.

Soit k^n la solution unique du problème dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t k^n - \lambda\Delta k^n - \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))\,\partial_z k^n) = H_j(t, M, \pi_n(k^n)), \\ (b) \quad k^n|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0). \end{cases}$$

On étudie la suite $(k^n)_{n\in I\!N}$ lorsque $j > \nu$ est fixé. Les deux étapes de cette étude sont :

- 1) estimations d'énergie,
- 2) passage à la limite dans l'équation.

• 1) *Estimations*. On choisit k^n comme fonction test dans (4.1.6), ce qui est possible dans ce cas (*cf.* définition 4.1.1). Il vient en intégrant sur $[0, t] \times \Omega$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |k^n|^2 - \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\beta_j(k_0)|^2 + \lambda\int_0^t\int_\Omega |\nabla k^n|^2 + \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega \beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))\,|\partial_z k^n|^2 = \int_0^t\int_\Omega H_j(t, M, \pi_n(k^n))\,k^n. \end{cases}$$

Comme on a supposé $j > \nu$, l'hypothèse (4.0.2) combinée aux inégalités de Sobolev et de Young implique

$$\text{(4.1.8)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |k^n|^2 + \nu\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c k^n|^2 \le \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\beta_j(k_0)|^2 + C_j\int_0^t\int_\Omega |k^n| \le \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\beta_j(k_0)|^2 + \dfrac{\mathcal{T} S^2 C_j^2}{2\nu} + \dfrac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla_c k^n|^2, \end{cases}$$

S est la constante de Sobolev et

$$C_j = ||\nu_v^t||_{L^\infty(I\!R)}||f_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\mu_t||_{L^\infty(I\!R)}||g_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + j,$$

les applications f_j et g_j sont définies par $(4.1.1)$. L'inégalité $(4.1.8)$ montre que la suite $(k^n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans l'espace

$$L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], L^2(\Omega)).$$

Cette estimation dépend de j et "explose" lorsque j tend vers l'infini, mais pour le moment j est toujours fixé. Par ailleurs,

$$\partial_t k^n = \lambda\Delta k^n + \partial_z(\beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))\,\partial_z k^n) + H_j(t, M, \pi_n(k^n)).$$

Comme $\beta_j(\nu_t)$ est bornée ainsi que H_j, l'estimation précédente montre aussi que la suite $(\partial_t k^n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^{-1}(\Omega))$.

• 2) *Passage à la limite*. On peut extraire de la suite $(k^n)_{n\in I\!N}$ une sous-suite, notée de la même manière, telle que $(k^n)_{n\in I\!N}$ converge vers $k \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$

(i) faiblement dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$,
(ii) fortement dans $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$,
(iii) presque partout dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$,
(iv) la suite $(\pi_n(k^n))_{n\in I\!N}$ converge vers k p.p dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$.

Le point (ii) résulte du lemme d'Aubin et du fait que la suite $(\partial_t k^n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^{-1}(\Omega))$, le point (iii) du théorème de Lebesgue inverse. Le point (iv) est une conséquence du point (ii) et d'une variante immédiate du lemme 4.1.1 combinée au théorème de Lebesgue inverse.

On passe à la limite dans chaque terme de l'équation l'un après l'autre dans leur formulation au sens des distributions. Soient q un test fixé dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ et $t \in [0,\mathcal{T}]$.

a) Le terme $h_n = H_j(t, M, \pi_n(k^n))\,q$. Comme H_j est continue par rapport à la troisième variable, d'après (iv) la suite $(h_n)_{n\in I\!N}$ converge vers $h = H_j(t, M, k)\,q$ dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$ p.p. Puisque

$$\forall\, n \in I\!N, \quad |h_n| \le C_j\, q \in L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega),$$

on a en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega H_j(t, M, \pi_n(k^n))\,q = \int_0^t \int_\Omega H_j(t, M, k)\,q.$$

b) Le terme de diffusion verticale. On note $g_n = \beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))\,\partial_z q$. La continuité de $\beta_j \circ \nu_t$ et le point (iii) qui précède permettent d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} (\beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))) = \beta_j(\nu_t(k)), \quad \text{p.p. dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega.$$

Puisque $\beta_j(\nu_t)$ est bornée

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \beta_j(\nu_t(k))\,\partial_z q \quad \text{dans } L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega) \text{ fort.}$$

Comme la suite $(\partial_z k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial_z k$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \beta_j(\nu_t(\pi_n(k^n)))\,\partial_z k^n.\,\partial_z q = \int_0^t\int_\Omega \beta_j(\nu_t(k))\,\partial_z k.\,\partial_z q.$$

c) Le terme $\partial_t k^n$ et conclusion. Comme la suite $(\partial_t k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}],H^{-1}(\Omega))$, on peut en extraire une sous-suite (notée de la même manière) qui converge vers un certain g dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^{-1}(\Omega))$ faible étoile. Soit $\phi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. Par définition

$$<\partial_t k^n,\phi> = -<k^n,\partial_t\phi> = -\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k^n\partial_t\phi,$$

les crochets de dualité sont ceux de $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. Or,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k^n\partial_t\phi = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\phi = -<\partial_t k,\phi>.$$

Par conséquent, $g=\partial_t k$ au sens des distributions. Puisque $\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ est partout dense dans $L^2([0,\mathcal{T}],H_0^1(\Omega))$

$$\partial_t k\in L^2([0,\mathcal{T}],H^{-1}(\Omega)),\quad g=\partial_t k \quad \text{dans } L^2([0,\mathcal{T}],H^{-1}(\Omega)).$$

Enfin, comme par définition

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla k^n.\,\nabla q = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla k\,.\,\nabla q,$$

il résulte des points a), b) et c) plus haut que $k\in L^2([0,\mathcal{T}],H_0^1(\Omega))$ est une solution faible de l'équation dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$

$$\partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\beta_j(\nu_t(k)))\,\partial_z k) = H_j(t,M,k),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.1. $\diamondsuit$

Il se pose maintenant le problème de faire tendre j vers l'infini.

REMARQUE 4.1.1 — La manière dont on a régularisé le second membre dans ce qui précède n'a pas une grande importance. On a procédé ainsi pour fixer les idées et pour que le second membre de l'équation soit une fonction continue par rapport à (t,M,k) et bornée afin de rester dans le cadre de la théorie classique. On se sert surtout de la continuité par rapport à k et de la bornitude pour passer à la limite. Cela étant, la méthode de temps de retard permet de la même manière de construire une solution faible au problème

$$
(4.1.9) \qquad \begin{cases} \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k))\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, \beta_j(|\, \partial_z \vec{v}\, |^2) - \beta_j(k \sqrt{|\, k\,|}) \, + \mu_t(k)\, \partial_z \rho, \end{cases} \\ k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0). \end{cases}
$$

En effet, puisque ν_v^t et μ_t sont bornées et $(\vec{v}, \rho) \in L^2([0, \mathcal{T}], [H^1(\Omega)]^2)$ on a toujours $\nu_v^t(k)\, \beta_j(|\, \partial_z \vec{v}\, |^2) \in L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ et $\mu_t(k)\, \partial_z \rho \in L^2([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Dans ce cas, on peut

— régulariser $\beta_j(|\, \partial_z \vec{v}\, |^2)$ et $\partial_z \rho$ par convolution,
— montrer un résultat d'existence avec le second membre régularisé par convolution,
— passer à la limite dans la convolution comme on vient de le faire compte tenu de la régularité mentionnée plus haut.

Dans les chapitres 5 et 6, on utilise l'approximation $(4.1.9)$. $\diamondsuit$

4. 2 — CONDITIONS HOMOGÈNES : PASSAGE À LA LIMITE

4.2.1 — ORIENTATION

D'ici la fin de ce paragraphe on aura montré entièrement l'existence d'une solution au sens des distributions à l'équation 4.0.3. La positivité d'une des solutions est étudiée dans la section 4.4. À partir de maintenant, on note k_j une solution de l'équation (4.1.4)

$$
(4.1.4) \qquad \begin{cases} (a) \quad \partial_t k_j - \lambda \Delta k_j - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j) = H_j(t, M, k_j), \\ (b) \quad k_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad k_j|_{t=0} = \beta_j(k_0). \end{cases}
$$

Pour pouvoir passer à la limite lorsque j tend vers l'infini dans cette équation, il faut d'abord

- obtenir une estimation pour la suite $(k_j)_{j \in I\!N}$ (section 4.2.3),
- obtenir une estimation pour la suite $(\partial_t k_j)_{j \in I\!N}$ (section 4.2.4).

Le fait que H_j tende vers une limite qui contient des fonction de $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ lorsque j tend vers l'infini, ne permet pas l'obtention d'estimations de la suite $(k_j)_{j \in I\!N}$ basées sur un bilan d'énergie : on ne peut pas estimer $\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c k_j|^2$. En revanche, il est possible d'estimer $\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c k_j|^q$ pour $q < 3/2$. C'est l'objet des deux sections suivantes, dont les résultats permettent le passage à la limite au sens des distributions dans la dernière section de ce paragraphe.

4.2.2 — ESTIMATIONS $L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p})$

On reprend dans cette section BOCCARDO-GALLOUET [1] où sont obtenues des estimations dans $L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$ pour des équations paraboliques avec des second membres dans L^1.

La proposition 4.2.1 est le résultat principal et est formulé dans un cadre général.

Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$. Pour tout entier n on pose

$$(4.2.1) \qquad B_{n,j} \stackrel{def}{=} \{(t,M) \in [0,\mathcal{T}] \times \Omega\,;\; n \leq |\, u_j(t,M)\,| \leq n+1\}\,.$$

On introduit les assertions suivantes.

$$(4.2.2) \quad \exists\, C_1 > 0\,; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} \int\!\!\int_{B_{n,j}} |\,\nabla_c u_j|^2 \leq C_1,$$

$$(4.2.3) \quad \exists\, P \in \mathbb{R}[X]\,; \quad \forall\, (j,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\,\nabla_c \beta_n(u_j)\,|^2 \leq P(n).$$

$$(4.2.4) \quad \exists\, C_2 > 0\,; \quad \sup_{(t,j)\in[0,\mathcal{T}]\times\mathbb{N}} \int_\Omega |\,u_j(t,M)\,|\, dM \leq C_2,$$

où β_n est la fonction de troncature à hauteur n (*cf.* section 2.3.2).

Lorsque la suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfait les trois assertions précédentes, on montre qu'elle est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ pour tout $p \in [1, 3/2[$. L'idée consiste à estimer $\int\!\int_{B_{n,j}} |\nabla_c u_j|^q$ en utilisant les inégalités de Hölder et de Sobolev pour chaque entier n, puis de faire la somme des estimations obtenues.

PROPOSITION 4.2.1 — *On suppose que la suite* $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *satisfait à* (4.2.2), (4.2.3) *et* (4.2.4). *Alors, pour tout* $p < 3/2$ *il existe une constante* C_p *vérifiant*

$$\lim_{p\to 3/2} C_p = \infty$$

et telle que

$$(4.2.5) \qquad \sup_{j\in\mathbb{N}} ||u_j||_{L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))} \leq C_p. \qquad \diamondsuit$$

REMARQUE 4.2.1 — L'exposant "critique" $3/2$ est propre à la dimension trois. Ce résultat se généralise à toute dimension. Dans le cas de la dimension N il vaut $N' = N/(N-1)$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — Soit $q \in [1, 2[$ que l'on précisera plus tard. En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$(4.2.6) \quad \int\!\!\int_{B_{n,j}} |\,\nabla_c u_j|^q \leq (mes(B_{n,j}))^\mu \left(\int\!\!\int_{B_{n,j}} |\,\nabla_c u_j|^2\right)^{\frac{q}{2}}, \quad \mu = \frac{2-q}{2}.$$

La définition (4.2.1) permet d'écrire

$$mes(B_{n,j}) \leq \frac{1}{n^r} \int\!\!\int_{B_{n,j}} |\,u_j|^r,$$

le réel r étant à fixer ultérieurement. Cette dernière inégalité combinée à $(4.2.6)$ et l'hypothèse $(4.2.2)$ conduit à

$$\int\int_{B_{n,j}} |\nabla_c u_j|^q \leq \frac{C_1^{\frac{q}{2}}}{n^{\mu r}} \left(\int\int_{B_{n,j}} |u_j|^r \right)^{\mu}. \tag{4.2.7}$$

Soit n_0 un entier fixé. Puisque pour tout $n < n_0$, $\beta_{n_0}(u_j) = u_j$ sur $B_{n,j}$, on écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla_c u_j|^q = \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{n=n_0-1} \int\int_{B_{n,j}} |\nabla_c \beta_{n_0}(u_j)|^q + \sum_{n=n_0}^{\infty} \int\int_{B_{n,j}} |\nabla_c u_j|^q. \end{array} \right. \tag{4.2.8}$$

En reportant $(4.2.3)$ et $(4.2.7)$ dans $(4.2.8)$ on a

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla_c u_j|^q \leq n_0\, P(n_0) + C_1^{\frac{q}{2}} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu r}} \left(\int\int_{B_{n,j}} |u_j|^r \right)^{\mu}. \tag{4.2.9}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Hölder implique

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu r}} \left(\int\int_{B_{n,j}} |u_j|^r \right)^{\mu} \leq \\ \displaystyle\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\left(\frac{\mu r}{1-\mu}\right)}} \right)^{1-\mu} \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |u_j|^r \right)^{\mu}. \end{array} \right. \tag{4.2.10}$$

On impose à r et μ de vérifier

$$\frac{\mu\, r}{1-\mu} > 1, \tag{4.2.11}$$

de sorte que

$$A(n_0, q, r) \stackrel{def}{=} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\mu r}{1-\mu}}} \right)^{1-\mu} \tag{4.2.12}$$

soit un réel bien défini. En combinant $(4.2.9)$ à $(4.2.10)$, on a avec la notation introduite par $(4.1.12)$

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla_c u_j|^q \leq n_0\, P(n_0) + C_1^{\frac{q}{2}}\, A(n_0, q, r) \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |u_j|^r \right)^{\mu}. \tag{4.2.13}$$

Soit

$$q^\star \stackrel{def}{=} \frac{3q}{(3-q)}$$

l'exposant critique lié à q. En utilisant l'inégalité de Hölder combinée à l'hypothèse $(4.2.4)$ on a

$$(4.2.14) \qquad \begin{cases} \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\, u_j|^r\right)^\mu \leq \\ \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\, u_j|\right)^{\left(\frac{q^\star - r}{q^\star - 1}\right)} \left[\int_0^{\mathcal{T}} \left(\int_\Omega |\, u_j|^{q^\star}\right)^{\left(\frac{r-1}{q^\star - 1}\right)}\right]^\mu \leq \\ (\mathcal{T}\, C_2)^{\left(\frac{q^\star - r}{q^\star - 1}\right)} \left[\int_0^{\mathcal{T}} \left(\int_\Omega |\, u_j|^{q^\star}\right)^{\left(\frac{r-1}{q^\star - 1}\right)}\right]^\mu . \end{cases}$$

En reportant $(4.2.14)$ dans $(4.2.13)$ puis en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient en notant S la constante de Sobolev

$$(4.2.15) \qquad \begin{cases} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\, \nabla_c u_j|^q \leq n_0\, P(n_0) + \\ S\, C_1^{\frac{q}{2}}\, A(n_0, q, r)\, (\mathcal{T}\, C_2)^{\left(\frac{q^\star - r}{q^\star - 1}\right)} \left[\int_0^{\mathcal{T}} \left(\int_\Omega |\, \nabla_c u_j|^q\right)^{\left(\frac{q^\star (r-1)}{q(q^\star - 1)}\right)}\right]^\mu . \end{cases}$$

Le problème consiste maintenant à savoir s'il est possible de choisir r et q avec $1 \leq r \leq q^\star$, $q \in]1, 2[$, ce qui implique que μ défini dans $(4.2.6)$ est strictement plus petit que 1 et tels que

$$(4.2.16) \qquad \frac{q^\star\,(r-1)}{q\,(q^\star - 1)} = 1$$

tout en s'assurant que $(4.2.11)$ soit satisfait. Nous affirmons qu'un tel choix est possible tant que $q < 3/2$. En effet, l'équation $(4.2.16)$ implique $r = (4/3)q$. Soit

$$f(q) \stackrel{def}{=} \frac{\mu\, r}{1-\mu} = \frac{2\,q\,(2-q)}{3\,(q-1)}.$$

Cette application est définie et continue sur l'intervalle $]1, 2]$, y est décroissante strictement et vérifie

$$\lim_{q \to 1} f(q) = +\infty, \quad f(2) = 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un unique $\tilde{q} \in]1, 2[$ avec $f(\tilde{q}) = 1$ et tel que pour tout $q \in]1, \tilde{q}[$, $f(q) > 1$, ce qui correspond à la condition $(4.2.11)$ tout en assurant que $(4.2.16)$ soit vérifiée. Il est facile de voir que $\tilde{q} = 2/3$ et que pour $q \in]1, \tilde{q}[$, $r \in [1, q^\star]$. La conclusion résulte de $(4.2.15)$ combiné au fait que $\mu < 1$. ♢

4.2.3 — ESTIMATIONS DANS L'ÉQUATION POUR L'ECT

Pour obtenir un résultat d'existence pour l'équation $(4.0.3)$, il nous reste à

- 1) appliquer la proposition 4.2.1 à la suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une estimation dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$,
- 2) en déduire une estimation pour la suite $(\partial_t k_j)_{j\in\mathbb{N}}$,
- 3) passer à la limite dans $(4.1.4)$ au sens des distributions lorsque j tend vers l'infini.

Dans cette section, on règle les points 1) et 2), le point 3) étant étudié dans la section suivante.

• 1) On rappelle que k_j est une solution faible de l'équation $(4.1.4)$ *i.e.*

$$(4.1.4) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t k_j - \lambda\Delta k_j - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j) = H_j(t,M,k_j), \\ (b) & k_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad k_j|_{t=0} = \beta_j(k_0), \end{cases}$$

où H_j est une régularisation du second membre de l'équation pour l'ECT $(4.0.3)$. On rappelle les hypothèses :

— $(\vec{v},\rho) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ est fixé, $k_0 \in L^1(\Omega)$, $k_0 \geq 0$ p.p. dans Ω,
— la viscosité ν_t est une fonction continue de k minorée par $\nu > 0$,
— les viscosités ν_v^t et μ_t sont continues, bornées et minorées par 0.

LEMME 4.2.1 — *La suite* $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *vérifie* $(4.1.10)$, $(4.1.11)$ *et* $(4.1.12)$. ♢

On en déduit que

$$(4.2.17) \qquad \forall p \in [1, 3/2[, \quad \exists C_p\,; \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad ||k_j||_{L^p([0,\mathcal{T}],L^p([0,\mathcal{T}],W_0^{1,p}(\Omega)))} \leq C_p.$$

DÉMONSTRATION — On note en premier lieu que puisque les viscosités turbulentes ν_v^t et μ_t sont des fonctions bornées, il existe une constante C qui ne dépend pas de j et telle que

$$(4.2.18) \qquad \forall k \in L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega), \quad ||\nu_v^t(k)\,f_j + \mu_t(k)\,g_j||_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq C,$$

où f_j et g_j sont définis dans la section 4.1.1 (*cf.* $(4.1.1)$). Dans la suite, on note

$$K_j \stackrel{def}{=} \nu_v^t(k_j)\,f_j + \mu_t(k_j)\,g_j,$$

ce qui permet de scinder le second membre de l'équation $(4.1.2)$ sous la forme

$$H_j = K_j - \beta_j(k_j\sqrt{|k_j|}).$$

D'après $(4.2.18)$, la suite $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. On vérifie chaque assertion de la proposition 4.2.1 l'une après l'autre.

Étape 1, assertion $(4.2.2)$. Soit g_n la fonction réelle impaire définie par

$$(4.2.19) \qquad \begin{cases} \forall u \in [0,n], \quad g_n(u) = 0\,; \quad \forall u \in [n,n+1], \quad g_n(u) = u - n\,; \\ \forall u \in [n+1,\infty[, \quad g_n(u) = 1. \end{cases}$$

fig 4.1.1

On note G_n la primitive de g_n qui s'annule en 0, c'est-à dire

$$\begin{cases} \forall\, u \in [0,n],\, G_n(u) = 0\,; \quad \forall\, u \in [n,n+1],\, G_n(u) = \dfrac{1}{2}u^2 - n\,u + \dfrac{n^2}{2}\,; \\ \forall\, u \in [n+1,\infty[,\, G_n(u) = u - n - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

la fonction G_n étant paire. On note que $G_n(u) \leq 1/2$ sur $[0, n+1]$ tandis que $G_n(u) \leq u$ sur $[n+1,\infty[$. Donc,

$$\forall\, u \in I\!R, \quad 0 \leq G_n(u) \leq |\,u\,| + 1/2. \tag{4.2.20}$$

On choisit $g_n(k_j) \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ comme fonction test dans l'équation $(4.1.4)$. Il vient

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega G_n(k_j) + \int_\Omega \beta_j(\nu_t(k_j))\, g_n'(k_j)\,|\,\partial_z k_j|^2 + \\ \lambda \displaystyle\int_\Omega g_n'(k_j)|\nabla k_j|^2 = \int_\Omega g_n(k_j)\, K_j - \int_\Omega g_n(k_j)\, \beta_j(k\sqrt{|k_j|}). \end{cases} \tag{4.2.21}$$

Par ailleurs,

— $|\, g_n(k_j)\,| \leq 1$ et $g_n' = 1$ sur $B_{n,j}$ et zéro ailleurs,
— les fonctions g_n et β_j sont impaires, donc $g_n(k_j)\,\beta_j(k_j\sqrt{|k_j|}) \geq 0$.

En particulier, le signe du terme $-\beta_j(k_j\sqrt{|k_j|})$ dans le second membre de l'équation $(4.1.4)$ fait que ce terme n'a pas d'influence sur les estimations qui suivent, un argument utilisé dans toutes les étapes de cette démonstration.

On intègre l'équation $(4.2.21)$ par rapport au temps sur $[0,\mathcal{T}]$ en se servant des deux remarques précédentes puis on utilise $(4.0.2)$ et $(4.2.18)$. Il vient

$$\int_\Omega G_n(k_j(\mathcal{T},M))\, dM + \nu \int_{B_{n,j}} |\nabla_c k_j|^2 \leq C + \int_\Omega G_n(\beta_j(k_0)). \tag{4.2.22}$$

Or $(4.2.20)$ implique

$$\begin{cases} 0 \leq \displaystyle\int_\Omega G_n(\beta_j(k_0)) \leq \\ ||\beta_j(k_0)||_{L^1(\Omega)} + \dfrac{1}{2}\, mes(\Omega) \leq ||k_0||_{L^1(\Omega)} + \dfrac{1}{2}\, mes(\Omega). \end{cases} \tag{4.2.23}$$

En combinant (4.2.23) à (4.2.22) et en notant que G_n est une fonction positive, on obtient

$$\int_{B_{n,j}} |\nabla_c k_j|^2 \leq \frac{C}{\nu} + \frac{1}{\nu}||k_0||_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2\nu}\, mes(\Omega),$$

ce qui montre que la suite $(k_j)_{j>\nu}$ vérifie (4.2.2).

Étape 2, assertion (4.2.3). On choisit cette fois-ci $\beta_n(k_j)$ comme fonction test dans (4.1.4) et on note Λ_n la primitive de β_n qui s'annule en 0, une fonction paire définie sur $I\!R_+$ par

$$\forall\, x \in [0,n], \quad \Lambda_n(x) = \frac{x^2}{2}\,; \quad \forall\, x \in [n, \infty[, \quad \Lambda_n(x) = n\, x - \frac{n^2}{2}.$$

On a en particulier

$$\int_\Omega \Lambda_n(\beta_j(k_0)) \leq n^2\, mes(\Omega) + n\, ||\, k_0||_{L^1(\Omega)}.$$

On raisonne exactement comme dans l'étape précédente en notant que

$$\beta_n(k_j) \leq n, \quad \beta_n' \geq 0, \quad \beta_n(k_j)\, \beta_j(k_j \sqrt{|k_j|}) \geq 0.$$

On a alors,

$$\text{(4.2.24)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Lambda(k_j(\mathcal{T}, M))\, dM + \nu \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \beta_n'(k_j)\, |\nabla_c k_j|^2 \leq \\ n^2\, mes(\Omega) + n\, (||\, k_0||_{L^1(\Omega)} + C). \end{cases}$$

Comme

$$\int_\Omega^{\mathcal{T}} \int_\Omega \beta_n'(k_j)\, |\, \nabla_c k_j|^2 = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\, \nabla_c \beta_n(k_j)\, |^2,$$

on est sûr que la suite $(k_j)_{j>\nu}$ satisfait (4.2.3) avec

$$P(n) = n^2\, mes(\Omega) + n\, (||\, k_0||_{L^1(\Omega)} + C).$$

Étape 3, assertion (4.2.4). Pour $a > 0$, on pose

$$\varphi_a(u) \stackrel{def}{=} \frac{1}{a}\, \beta_a(u), \quad \psi_a(u) \stackrel{def}{=} \int_0^u \varphi_a(s)\, ds.$$

L'application φ_a est une approximation de la fonction “signe". Notons que ψ_a est une fonction paire et positive.

Cette fois-ci, la fonction test choisie est $\varphi_a(k_j)$. Pour tout $t \in]0, \mathcal{T}]$, on intègre en temps sur l'intervalle $[0, t]$ après avoir intégré par parties en espace. Puisque

$$\varphi_a' \geq 0, \quad |\, \varphi_a| \leq 1,$$

on a

$$\int_\Omega \psi_a(k_j(t,M))\,dM \le C + \int_\Omega \psi_a(k_0(M))\,dM. \tag{4.2.25}$$

Étant donné que la suite $(\psi_a)_{a>0}$ converge uniformément vers l'application $x \to |\,x\,|$, lorsque $a \to 0$, on déduit du lemme de Fatou

$$\int_\Omega |\,k_j(t,M)\,|\,dM \le \liminf_{a\to 0} \int_\Omega \psi_a(k_j(t,M))\,dM. \tag{4.2.26}$$

Par ailleurs, la suite $(\psi_a(k_j))_{a>0}$ converge vers $|\,k_j|$ p.p lorsque $a \to 0$ et pour tout $a > 0$,

$$0 \le \psi_a(k_0) \le |\,k_0| + (a/2) \in L^1(\Omega).$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\lim_{a\to 0} \int_\Omega \psi_a(k_0(M))\,dM = \int_\Omega k_0(M)\,dM. \tag{4.2.27}$$

En combinant (4.2.25), (4.2.26) et (4.2.27), on obtient

$$\int_\Omega |\,k_j(t,M)\,|\,dM \le C + \int_\Omega k_0(M)\,dM,$$

une inégalité valable pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$. La suite $(k_j)_{j>\nu}$ satisfait (4.2.4), ce qui achève la preuve de ce lemme. $\diamondsuit$

En conclusion, le lemme 4.2.1 et l'étape 3 de sa démonstration combinés à la proposition 4.2.1 montrent le lemme 4.2.2.

LEMME 4.2.2 — *Soit $k_j \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ une solution faible de l'équation (4.2.28),*

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k))\,\partial_z k) = H_j(t,M,k), \\ (b) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0), \end{cases} \tag{4.2.28}$$

avec

$$H_j(t,M,k) = \nu_v^t(k)\,f_j + \mu_t(k)\,g_j - \beta_j(k\sqrt{|k|}),$$

f_j et g_j sont des régularisations par convolution de $|\,\partial_z \vec{v}\,|^2$ et de $\partial_z\rho$ et on suppose que

(i) $(\vec{v}, \rho) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ *est fixé,*
(ii) ν_t *est une fonction continue minorée par* $\nu > 0$*,*
(iii) ν_v^t *et* μ_t *sont continues, bornées et minorées par* 0*.*

Alors, pour tout $p \in [1, 3/2[$ la suite $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans l'espace

$$L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega)) \cap L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))). \qquad \diamondsuit$$

La suite du programme consiste à trouver une borne dans un espace “correct" pour la suite $(\partial_t k_j)_{j>\nu}$, ce qui fait l'objet de la section suivante en supposant que la viscosité ν_t vérifie une hypothèse de croissance. Mais avant, on a besoin de la conséquence suivante du lemme 4.2.2 obtenue à partir d'une interpolation.

LEMME 4.2.3 — *Soit* $k_j \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_0(\Omega))$ *une solution faible de l'équation* (4.2.28). *On supppose que les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme 4.2.2 ont lieu. Pour* $\gamma \in]0,1[$ *on pose*

$$q_1(\gamma) \stackrel{def}{=} \frac{3}{2(1-\gamma)}, \quad q_2(\gamma) \stackrel{def}{=} \frac{3}{1+2\gamma}. \tag{4.2.29}$$

Alors,

$$\forall\, \gamma \in]0,1[, \quad \forall\, q \in [1, q_1(\gamma)[, \quad \forall r \in [1, r_1(\gamma)[,$$

la suite $(k_j)_{j>\nu}$ *est bornée dans l'espace* $L^q([0,\mathcal{T}], L^r(\Omega))$. $\diamondsuit$

COROLLAIRE 4.2.1 — *Pour tout* $r \in [1,2[$ *la suite* $(k_j)_{j>\nu}$ *est bornée dans l'espace* $L^r([0,\mathcal{T}], L^r(\Omega))$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On démontre le lemme 4.2.4 en deux étapes :

1) démonstration d'un résultat général d'interpolation,
2) application du résultat montré en 1) au cas présent.

1) On a

$$\begin{cases} \forall\, \gamma \in]0,1[, \quad \forall\, (q,p) \in ([1,\infty[)^2, \\ L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega)) \cap L^q([0,\mathcal{T}], L^p(\Omega)) \subset \\ L^{\frac{q}{1-\gamma}}([0,\mathcal{T}], L^{\frac{p}{1+\gamma(p-1)}}(\Omega)). \end{cases} \tag{4.2.30}$$

En effet soient $\gamma \in]0,1[$, $(q,p) \in ([1,\infty[)^2$ et $u \geq 0$ tels que

$$u \in L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega)) \cap L^q([0,\mathcal{T}], L^p(\Omega)).$$

On considère $r \in [1,\infty[$ tel que $\gamma\, r < 1$. L'inégalité de Hölder implique

$$\int_\Omega u^r = \int_\Omega u^{\gamma r} u^{(1-\gamma)r} \leq \left(\int_\Omega u\right)^{\gamma r} \left(\int_\Omega u^{\frac{(1-\gamma)r}{1-\gamma r}}\right)^{1-\gamma r}.$$

On en déduit

$$\int_\Omega u^r \leq ||u||^{\gamma r}_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))} \left(\int_\Omega u^{\frac{(1-\gamma)r}{1-\gamma r}}\right)^{1-\gamma r}.$$

Par conséquent, pour $\delta > 1$

$$\int_0^{\mathcal{T}} ||u||^\delta_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\delta\gamma}_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))} \int_0^{\mathcal{T}} \left(\int_\Omega u^{\frac{(1-\gamma)r}{1-\gamma r}}\right)^{\delta\left(\frac{1-\gamma r}{r}\right)}.$$

Comme $u \in L^q([0,\mathcal{T}],L^p(\Omega))$ on cherche r et δ tels que

$$\frac{(1-\gamma)r}{1-\gamma r}=p, \quad \delta\left(\frac{1-\gamma r}{r}\right)=\frac{q}{p},$$

c'est-à-dire

$$r=\frac{p}{1+\gamma(p-1)}, \quad \delta=\frac{q}{1-\gamma},$$

ce qui démontre (4.2.30). En outre, la condition $\gamma\, r<1$ est bien vérifiée. Il faut noter que l'on a surtout démontré l'inégalité formelle

$$||u||_{L^{\frac{q}{1-\gamma}}([0,\mathcal{T}],L^{\frac{p}{1+\gamma(p-1)}}(\Omega))} \leq ||u||^{\gamma}_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))}||u||^{1-\gamma}_{L^q([0,\mathcal{T}],L^p(\Omega))} \tag{4.2.31}$$

valable pour tout $(q,p,\gamma)\in([1,\infty[)^2\times]0,1[$.

2) Soit $\gamma\in]0,1[$. D'après le lemme 4.2.2, pour tout $\varepsilon>0$ la suite $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans

$$L^{\frac{3}{2}-\varepsilon}([0,\mathcal{T}],W_0^{1,\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)).$$

Un développement limité combiné au théorème d'injections de Sobolev montre que

$$W_0^{1,\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)\subset L^{p_\varepsilon}(\Omega)$$

avec

$$p_\varepsilon=3-\frac{13}{2}\varepsilon+O(\varepsilon^2). \tag{4.2.32}$$

De plus, p_ε est continue par rapport à ε.

On déduit donc du lemme 4.2.2 que pour tout $\varepsilon>0$ (assez petit) la suite $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans

$$L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))\cap L^{\frac{3}{2}-\varepsilon}([0,\mathcal{T}],L^{p_\varepsilon}(\Omega)).$$

On applique (4.2.31) avec les exposants p_ε et q_ε où

$$q_\varepsilon=\frac{3}{2}-\varepsilon.$$

Soient

$$s_\varepsilon(\gamma)\stackrel{def}{=}\frac{q_\varepsilon}{1-\gamma}, \quad t_\varepsilon(\gamma)\stackrel{def}{=}\frac{p_\varepsilon}{1+\gamma(p_\varepsilon-1)}$$

qui sont continues par rapport à ε. En effectuant un développement limité au premier ordre en utilisant (4.2.32), on a

$$t_\varepsilon(\gamma)=\frac{1}{1+2\gamma}\left(3-\frac{13}{2(1+\gamma)}\varepsilon+O(\varepsilon^2)\right).$$

On en déduit que $s_\varepsilon(\gamma)$ et $t_\varepsilon(\gamma)$ vérifient :

$$(4.2.33) \qquad \begin{cases} \exists\, \varepsilon_0 > 0\,; \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \\ s_\varepsilon(\gamma) < \dfrac{3}{2(1-\gamma)} = q_1(\gamma), \quad t_\varepsilon(\gamma) < \dfrac{3}{1+2\gamma} = q_2(\gamma), \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} s_\varepsilon(\gamma) = q_1(\gamma), \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} t_\varepsilon(\gamma) = q_2(\gamma). \end{cases}$$

De plus,

$$(4.2.34) \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{la suite} \quad (k_j)_{j>\nu} \quad \text{est bornée dans} \\ L^{s_\varepsilon(\gamma)}([0, \mathcal{T}], L^{t_\varepsilon(\gamma)}(\Omega)) \end{cases}$$

et on a l'inégalité

$$(4.2.35) \qquad ||k_j||_{L^{s_\varepsilon(\gamma)}([0,\mathcal{T}], L^{t_\varepsilon(\gamma)}(\Omega))} \leq S\, C^\gamma\, D_\varepsilon^{1-\gamma},$$

$q_\varepsilon = (3/2) - \varepsilon$, S est la constante de Sobolev et

$$C = \sup_{j>\nu} ||k_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega))}, \quad D_\varepsilon = \sup_{j>\nu} ||k_j||_{L^{q_\varepsilon}([0,\mathcal{T}], W_0^{1,q_\varepsilon}(\Omega))}.$$

Le lemme 4.2.3 se déduit de $(4.2.33)$, $(4.2.35)$ et du lemme 4.2.2.

Le corollaire s'obtient en prenant $\gamma = 1/4$. Il faut noter que l'on n'atteint pas l'espace $L^2([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$. ♢

REMARQUE 4.2.2 — On insiste sur le fait qu'aucune condition de croissance sur ν_t est nécessaire à l'obtention des estimations précédentes. ♢

4.2.4 — ESTIMATION DES DÉRIVÉES PAR RAPPORT AU TEMPS

Il reste à obtenir une estimation pour la suite $(\partial_t k_j)_{j>\nu}$. Pour cela, une hypothèse de croissance sur ν_t est nécessaire. On montre dans cette section le lemme 4.2.4.

LEMME 4.2.4 — *Soit* $k_j \in L^2([0, \mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ *une solution de* $(4.2.28)$. *On suppose que les hypothèses (i), (ii) et (iii) du lemme 4.2.2 ont lieu et en outre que* ν_t *satisfait l'hypothèse de croissance*

$$(4.2.36) \qquad \exists\, C \in I\!R^+, \ \exists\, \theta \in [0, 2/3[, \quad \forall\, k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1 + |\, k\,|^\theta).$$

Alors, il existe un réel $q_0 > 1$ *tel que la suite* $(\partial_t k_j)_{j>\nu}$ *soit bornée dans l'espace* $L^1([0, \mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega))$. ♢

DÉMONSTRATION — La démonstration est basée sur les estimations obtenues dans la section précédente. On écrit

$$(4.2.37) \qquad \partial_t k_j = \lambda \Delta k_j + \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j) + H_j(t, M, k_j).$$

On étudie chaque terme du deuxième membre de cette égalité l'un après l'autre en commençant par ceux qui ne posent pas de problèmes. Le terme difficile à étudier est $\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j)$.

a) *Le terme* Δk_j. Soit $p \in [1, 3/2[$. Comme $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans l'espace $L^p([0, \mathcal{T}], L^p([0, \mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ (*cf.* lemme 4.2.2),

— la suite $(\Delta k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], W^{-1,p'}(\Omega))$,

$p' = p/(p-1)$ est l'exposant conjugué de p.

b) *Le terme* $H_j(t, M, k_j)$. On note en premier lieu que

$$H_j(t, M, k_j) = K_j - \beta_j(k\sqrt{|k|}),$$

la fonction K_j étant définie au début de la preuve du lemme 4.2.1,

$$K_j = \nu_v^t(k)\, f_j + \mu_t(k)\, g_j,$$

f_j et g_j sont des régularisations par convolution de $|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2$ et de $\partial_z \rho$. Cette suite est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. On déduit du corrolaire 4.2.1 que

— la suite $(\beta_j(k_j\sqrt{|k_j|}))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^r([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ pour tout $r \in [1, 4/3[$.

Par conséquent, la suite $(H_j(t, M, k_j))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. Or, il résulte du théorème d'injections de Sobolev qu'en dimension 3 l'espace $L^1(\Omega)$ s'injecte continuement dans $W^{-1,4}(\Omega)$. Par conséquent,

— la suite $(H_j(t, M, k_j))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}], W^{-1,4}(\Omega))$.

c) *Le terme* $\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j)$. On démontre par la suite :

$$\forall\, a \in]\frac{6}{2-3\theta}, \infty[, \quad \forall\, q \in\ [1, \frac{6}{4+3\theta}[,$$

$(\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^q([0,\mathcal{T}], W^{-1,a}(\Omega))$.ÃÐ

On rappelle que l'exposant θ est défini dans l'hypothèse de croissance $(4.2.36)$.

On commence par borner la suite $(\beta_j(\nu_t(k_j)\,\partial_z k_j))_{j>\nu}$. Soit $\gamma\in]0,1[$. Puisque ν_t satisfait l'hypothèse de croissance $(4.2.36)$, on déduit de $(4.2.35)$ que

i) $(\beta_j(\nu_t(k_j)))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^{\frac{s_\varepsilon(\gamma)}{\theta}}([0,\mathcal{T}], L^{\frac{t_\varepsilon(\gamma)}{\theta}}(\Omega))$

(le résultat est vérifié en fait par la suite $(\nu_t(k_j))_{j>\nu}$ donc également par la suite $(\beta_j(\nu_t(k_j)))_{j>\nu}$). Par ailleurs

ii) la suite $(\partial_z k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^{\frac{3}{2}-\varepsilon}([0,\mathcal{T}], L^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega))$.

Soient alors $r_\varepsilon(\gamma)$et $j_\varepsilon(\gamma)$ définis par

$$\frac{1}{r_\varepsilon(\gamma)} = \frac{\theta}{t_\varepsilon(\gamma)} + \frac{1}{\frac{3}{2}-\varepsilon}, \quad \frac{1}{j_\varepsilon(\gamma)} = \frac{\theta}{s_\varepsilon(\gamma)} + \frac{1}{\frac{3}{2}-\varepsilon}.$$

En faisant un développement limité au premier ordre, on a

$$(4.2.38)\qquad \begin{cases} r_\varepsilon(\gamma) = \dfrac{3}{\theta(1+2\gamma)+2}\left(1 - \dfrac{13\,\theta+8}{6\,[\theta\,(1+2\gamma)+2]}\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right), \\ j_\varepsilon(\gamma) = \dfrac{3}{2\,(\theta\,(1-\gamma)+1)}\left(1 - \dfrac{2}{3}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right). \end{cases}$$

On en déduit en particulier :

$$\text{(4.2.39)} \qquad \begin{cases} \exists\, \varepsilon_0 > 0\,; \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \\ r_\varepsilon(\gamma) < \dfrac{3}{\theta(1+2\gamma)+2} \overset{def}{=} r(\gamma), \\ j_\varepsilon(\gamma) < \dfrac{3}{2(\theta(1-\gamma)+1)} \overset{def}{=} j(\gamma), \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(\gamma) = r(\gamma), \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon(\gamma) = j(\gamma). \end{cases}$$

Lorsque

$$\text{(4.2.40)} \qquad r_\varepsilon(\gamma) > 1 \quad \text{et} \quad j_\varepsilon(\gamma) > 1$$

l'inégalité de Hölder combinée aux points i) et ii) plus hauts montre que

iii) $(\nu_t(k_j)\partial_z(k_j))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^{j_\varepsilon(\gamma)}([0, \mathcal{T}], L^{r_\varepsilon(\gamma)}(\Omega))$,

et qu'en utilisant l'inégalité $(4.2.35)$

$$\text{(4.2.41)} \qquad ||\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z(k_j)||_{L^{j_\varepsilon(\gamma)}([0,\mathcal{T}], L^{r_\varepsilon(\gamma)}(\Omega))} \leq S\, C^\gamma\, D_\varepsilon^{2-\gamma}.$$

Ceci n'a de sens que lorsque la condition de compatibilité $(4.2.40)$ est satisfaite. On déduit de $(4.2.39)$ qu'elle est vérifiée pour ε assez petit si et seulement si

$$r(\gamma) = \frac{3}{\theta(1+2\gamma)+2} > 1, \quad j(\gamma) = \frac{3}{2(\theta(1-\gamma)+1)} > 1,$$

ce qui est équivalent à la condition

$$\text{(4.2.42)} \qquad \theta < min\left(\frac{1}{2(1-\gamma)}, \frac{1}{1+2\gamma}\right).$$

De plus, on veut optimiser le nombre θ vérifiant $(4.2.42)$, ce qui revient à déterminer

$$\theta_0 = max\left(min\left(\frac{1}{2(1-\gamma)}, \frac{1}{1+2\gamma}\right)\right).$$

On observe que $\theta_0 = 2/3$ et est atteint pour $\gamma = 1/4$. Or, on a supposé que $\theta \in [0, 2/3[$. On note enfin que

$$r(1/4) = j(1/4) = \frac{6}{4+3\theta}.$$

On est maintenant en mesure de borner la suite $(\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z(k_j)))_{j>\nu}$. On remarque d'abord que

$$(r(1/4))' = \frac{6}{2-3\theta}.$$

Soient

$$a \in]\frac{6}{2-3\theta}, \infty[, \quad q \in [1, \frac{6}{4+3\theta}[, \quad \varphi \in L^{q'}([0, \mathcal{T}], W_0^{1,a}(\Omega)).$$

On pose

$$< \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j), \varphi > = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j \, . \, \partial_z \varphi.$$

Puisque $a' < r(1/4)$ et $q < j(1/4)$, on déduit de (4.2.39) qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$a' \leq r_{\varepsilon_0}(1/4), \quad q \leq j_{\varepsilon_0}(1/4).$$

Par conséquent, il existe une constante C_{ε_0} qui dépend de ε_0 et de Ω et telle que

$$||\partial_z \varphi||_{L^{(j_{\varepsilon_0}(1/4))'}([0,\mathcal{T}], L^{(r_{\varepsilon_0}(1/4))'}(\Omega))} \leq C_{\varepsilon_0} ||\varphi||_{L^{q'}([0,\mathcal{T}], W_0^{1,a}(\Omega))}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} | < \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z(k_j)), \varphi > | \leq \\ C_{\varepsilon_0} ||\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j||_{L^{j_{\varepsilon_0}}([0,\mathcal{T}], L^{r_{\varepsilon_0}(1/4)}(\Omega))} ||\varphi||_{L^{q'}([0,\mathcal{T}], W_0^{1,a}(\Omega))} \end{cases}$$

qui, combinée à (4.2.41), entraîne

$$||\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z(k_j))||_{L^q([0,\mathcal{T}], W^{-1,a}(\Omega))} \leq C_{\varepsilon_0}\, S\, C^{\frac{1}{4}}\, D_{\varepsilon_0}^{\frac{7}{4}}.$$

Par conséquent, pour tout

$$a \in]\frac{6}{2-3\theta}, \infty[, \quad q \in [1, \frac{6}{4+3\theta}[,$$

$(\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^q([0, \mathcal{T}], W^{-1,a}(\Omega))$.

d) *Conclusion*. En combinant (4.2.37) aux conclusions des points a), b) et c) qui précèdent, on voit que la suite $(\partial_t k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans

$$E_{p,a,q} = L^p([0, \mathcal{T}], W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1([0, \mathcal{T}], W^{-1,4}(\Omega)) + L^q([0, \mathcal{T}], W^{-1,a}(\Omega))$$

pour tout

$$p \in [1, 3/2[, \quad a \in]\frac{6}{2-3\theta}, \infty[, \quad q \in [1, \frac{6}{4+3\theta}[.$$

On fixe les exposants $p > 1$, $a > 1$ et $q > 1$ satisfaisant cette contrainte. Il résulte du théorème d'injections de Sobolev qu'il existe $q_0 > 1$ tel que $E_{p,a,q}$ s'injecte continuement dans $L^1([0, \mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega))$, ce qui achève cette démonstration. $\diamondsuit$

REMARQUE 4.2.3 — Il est important de noter que l'obtention des estimations des lemmes 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4 ne dépendent pas vraiment de la forme du second membre $H_j(t, M, k)$. On a posé

$$H_j(t, M, k) = K_j(t, M, k) - \beta_j(k\sqrt{|k|}) = \nu_v^t(k)\, f_j + \mu_t(k)\, g_j - \beta_j(k\sqrt{|k|}),$$

où f_j et g_j sont des régularisations par convolution de $|\, \partial_z \vec{v}\, |^2$ et de $\partial_z \rho$. Les points importants pour l'obtention de ces estimations sont :

- le signe du terme $-\beta_j(k\sqrt{|k|})$,
- le fait que ν_v^t et μ_t soient bornées et donc que pour tout k mesurable,

$$||K_j(t,M,k)||_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq C, \tag{4.2.43}$$

où C ne dépend pas de j.

Par conséquent, les résultats des lemmes 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4 restent encore valables pour n'importe quel $K_j(t,M,k)$ satisfaisant (4.2.43).

4.2.5 — PASSAGE À LA LIMITE POUR UN SECOND MEMBRE DANS $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$

On dispose maintenant de toutes les estimations nécessaires au passage à la limite dans l'équation (4.2.28),

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t k_j - \lambda\Delta k_j - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j) = H_j(t,M,k_j), \\ (b) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0), \end{cases} \tag{4.2.28}$$

lorsque j tend vers l'infini. On note p un réel "près" de $3/2$, fixé dans ce qui suit. On note en général les suites extraites de la même manière que les suites elles mêmes. On rappelle également que

— (i) $(\overrightarrow{v},\rho) \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Omega))$ est fixé,

— (ii) la viscosité ν_t est une fonction continue de k minorée par $\nu > 0$ et vérifie

$$\exists\, C \in I\!\!R^+,\ \exists\,\theta \in [0,2/3[,\quad \forall\, k \in I\!\!R,\quad \nu_t(k) \leq C(1+|\,k\,|^\theta),$$

— (iii) les viscosités ν_v^t et μ_t sont continues, bornées et minorées par 0.

On déduit du lemme 4.2.3 qu'il existe $k \in L^p([0,\mathcal{T}],L^p([0,\mathcal{T}],W_0^{1,p}(\Omega)))$ tel que

- 1) de la suite $(k_j)_{j>\nu}$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers k dans $L^p([0,\mathcal{T}],L^p([0,\mathcal{T}],W_0^{1,p}(\Omega)))$.

Par ailleurs, étant donné $\varepsilon > 0$ on a les injections

$$L^p([0,\mathcal{T}],W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^1(\Omega) \subset W^{-1,q_0},$$

où q_0 est défini dans le lemme 4.2.4, la première injection étant compacte. Le lemme 4.2.4 et le lemme d'Aubin généralisé dans SIMON [1] impliquent que

- 2) de la suite $(k_j)_{j>\nu}$, on peut extraire une sous-suite fortement convergente vers k dans $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$.

On déduit du point 2) précédent et du théorème de Lebesgue inverse que

- 3) de la suite $(k_j)_{j>\nu}$, on peut extraire une sous-suite convergente vers k p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$.

Enfin, le corollaire 4.2.1 combiné au point 3) précédent, au théorème d'Égorov et à l'inégalité de Hölder montrent :

- 4) soit $\varepsilon>0$ fixé de sorte que $2-\varepsilon>3/2$; de la suite $(k_j)_{j>\nu}$, on peut extraire une sous-suite fortement convergente vers k dans $L^{2-\varepsilon}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$.

À partir de maintenant, $(k_j)_{j>\nu}$ est la suite extraite vérifiant les points 1), 2) et 3) et 4) précédents. Il faut noter que

pour tout $q\in[1,3/2[$, $k\in L^q([0,\mathcal{T}],W_0^{1,q}(\Omega))$.

Soit $q\in]p,3/2[$. La suite $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^q([0,\mathcal{T}],W_0^{1,q}(\Omega))$. On peut de la suite $(k_j)_{j>\nu}$ extraire une sous-suite faiblement convergente vers un certain $\tilde{k}\in L^q([0,\mathcal{T}],W_0^{1,q}(\Omega))$. L'unicité de la limite assure que $\tilde{k}=k$.

LEMME 4.2.5 — *La fonction $k\in L^p([0,\mathcal{T}],L^p([0,\mathcal{T}],W_0^{1,p}(\Omega)))$ est une solution au sens des distributions de l'équation*

$$\partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)=\nu_v^t(k)\,|\,\partial_z\vec{v}\,|^2+\mu_t(k)\,\partial_z\rho-k\sqrt{|k|} \tag{4.2.44}$$

et vérifie $k|_{t=0}=k_0$. $\diamondsuit$

On commence par rappeler que k est une solution de $(4.2.44)$ au sens des distributions si et seulement si pour tout $\varphi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$, on a

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\varphi+\lambda\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nabla k.\nabla\varphi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nu_t(k)\,\partial_z k.\,\partial_z\varphi= \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\nu_v^t(k)\,|\,\partial_z\vec{v}\,|^2\varphi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\mu_t(k)\,\partial_z\rho\,\varphi-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\sqrt{|k|}\,\varphi. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION — Soit $\varphi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ un test fixé. On passe à la limite au sens des distributions dans tous les termes de l'équation $(4.2.28)$ les uns après les autres.

a) *Le terme d'évolution*. Par définition

$$<\partial_t k_j,\varphi>=-<k_j,\partial_t\varphi>=-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k_j\,\partial_t\varphi.$$

Or, d'après le point 3) plus haut,

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k_j\,\partial_t\varphi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\varphi=-<\partial_t k,\varphi>.$$

b) *Le terme de diffusion horizontale.* Par définition

$$< -\Delta k_j, \varphi > = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla k_j \,.\nabla \varphi.$$

Or, d'après le point 1) plus haut

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla k_j \,.\nabla \varphi = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla k \,.\nabla \varphi = < -\Delta k, \varphi >.$$

c) *Le terme de diffusion verticale.* Toujours par définition,

$$< -\partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j), \varphi > = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j \,.\, \partial_z \varphi.$$

D'après le corollaire 4.2.1 et le fait que ν_t satisfasse la condition de croissance $(4.2.36)$, on sait que pour tout $q < 2/\theta$ la suite $(\beta_j(\nu_t(k_j))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^q([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. Comme $\theta < 2/3$, $3 < 2/\theta$. Par conséquent, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

la suite $(\beta_j(\nu_t(k_j)))_{j>\nu}$ est bornée dans $L^{3+\varepsilon_0}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$.

Par ailleurs, le point 3) précédent et la continuité de ν_t assurent que

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j(\nu_t(k_j)) = \nu_t(k) \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega.$$

On en déduit que

$$\lim_{j\to\infty} \beta_j(\nu_t(k_j)) = \nu_t(k)$$

dans $L^{3+\varepsilon}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ fort pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Comme $\partial_z \varphi \in C^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ et $(3+\varepsilon)' < 3/2$, d'après le lemme 4.2.2

la suite $(\partial_z k_j \,.\, \partial_z \varphi)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^{(3+\varepsilon)'}([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Donc quitte à extraire une sous-suite, en conséquence du point 1) et de l'unicité de la limite faible

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \beta_j(\nu_t(k_j))\, \partial_z k_j .\, \partial_z \varphi = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nu_t(k)\, \partial_z k \,.\, \partial_z \varphi = < -\partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k), \varphi >. \end{cases}$$

d) *Les termes de production et de flottabilité.* On a

$$< \nu_v^t(k_j)\, f_j, \varphi > = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nu_v^t(k_j)\, f_j\, \varphi.$$

Puisque la suite $(f_j)_{j>\nu}$ converge vers $|\,\partial_z \vec{v}\,|^2$ dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ fort, il résulte du théorème de Lebesgue inverse que quitte à extraire une sous-suite,

— $(f_j)_{j>\nu}$ converge vers $|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2$ p.p. dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$,
— il existe $g \in L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ telle que $|f_j| \leq g$. ÃĐ

Comme ν_v^t est bornée continue, $(k_j)_{j>\nu}$ converge vers k p.p et $\varphi \in \mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$

$$\begin{cases} |\nu_v^t(k_j)\, f_j\, \varphi| \leq C\, g\, \varphi \in L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega), \\ \lim\limits_{j\to\infty} \nu_v^t(k_j)\, f_j\, \varphi = \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2\, \varphi \quad \text{p.p dans} \quad [0,\mathcal{T}]\times\Omega. \end{cases}$$

Il résulte du théorème de Lebesgue que

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nu_v^t(k_j)\, f_j\, \varphi = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2\, \varphi = <\nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2, \varphi>.$$

Un argument ananlogue utilisant la bornitude et la continuité de μ_t montre que

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} <\mu_t(k_j)\, g_j, \varphi> = \lim\limits_{j\to\infty} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \mu_t(k_j)\, g_j\, \varphi = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \mu_t(k)\,\partial_z\rho\,\varphi \; = <\mu_t(k)\,\partial_z\rho, \varphi>. \end{cases}$$

e) *Le terme de cascade inverse*. On a

$$<\beta_j(k_j\sqrt{|k_j|}), \varphi> = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \beta_j(k_j\sqrt{|k_j|})\,\varphi.$$

Il résulte directement du point 4) que

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \beta_j(k_j\sqrt{|k_j|})\,\varphi = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\sqrt{|k|}\,\varphi = <k\sqrt{|k|}, \varphi>.$$

En combinant les conclusions de a), b), c), d) et e) précédents à l'équation (4.2.28) vérifiée par k_j, on a montré que k satisfait au sens des distributions

$$\partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{|k|}.$$

Il reste encore la question de la donnée initiale. Notons que les conclusions des points b), c), d) et e) sont encore vraies lorsque l'on choisit $\varphi \in C^\infty([0,\mathcal{T}], \mathcal{D}(\Omega))$ comme fonction test. Soit alors $\varphi \in C^\infty([0,\mathcal{T}], \mathcal{D}(\Omega))$ telle que

$$\forall\, M \in \Omega, \quad \varphi(\mathcal{T}, M) = 0.$$

Puisque pour tout $j > \nu$, $k_j|_{t=0} = \beta_j(k_0)$, on a par définition

$$<\partial_t k_j, \varphi> = \int_\Omega \beta_j(k_0(M))\,\varphi(0,M)\,dM - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k_j\,\partial_t\varphi\,dt\,dM.$$

Comme

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \beta_j(k_0(M)) = k_0 \quad \text{p.p dans } \Omega, \\ |\beta_j(k_0)| \leq k_0 \in L^1(\Omega), \end{cases}$$

il résulte du théorème de Lebesgue et de la convergence forte de $(k_j)_{j>\nu}$ vers k dans $L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ que

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} < \partial_t k_j, \varphi > = \\ \displaystyle\int_\Omega k_0(M)\,\varphi(0,M)\,dM - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\varphi\,dt\,dM = < \partial_t k, \varphi >, \end{cases}$$

ce qui montre que $k|_{t=0} = k_0$, terminant la preuve du lemme 4.2.5. $\diamondsuit$

On résume les résultats démontrés dans ce paragraphe dans le théorème 4.2.1.

THÉORÈME 4.2.1 — *On suppose que*

i) le couple $(\overrightarrow{v},\rho)$ *est fixé dans* $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$,
ii) $k_0 \in L^1(\Omega)$,
iii) ν_t, ν_v^t *et* μ_t *sont continues,* ν_v^t *et* μ_t *sont minorées par* 0, ν_t *est minorée par* $\nu > 0$,
iv) ν_v^t *et* μ_t *sont bornées et* ν_t *vérifie la condition de croissance*

$$\exists C \in I\!R^+, \ \exists \theta \in [0, 2/3[, \quad \forall k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1 + |\,k\,|^\theta).$$

Alors, le problème

$$\begin{cases} (a) \quad \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{|k|}, \end{cases} \\ (b) \quad k|_{\Gamma_s} = 0, \quad k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0 \end{cases}$$

($\lambda \geq \nu > 0$*) possède une solution*

$$k \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$$

au sens des distributions. $\diamondsuit$

On étudie dans les paragraphes suivants

- le cas $\overrightarrow{\mathrm{v}} \neq 0$,
- l'existence d'une solution positive à l'équation pour l'ECT

et ce, toujours lorsque le couple $(\overrightarrow{v},\rho)$ est fixé dans $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$.

4. 3 — L'ÉQUATION POUR L'ÉNERGIE CINÉTIQUE TURBULENTE AVEC LA TENSION DU VENT

4.3.1 — ORIENTATION

On considère dans ce paragraphe le cas où $\vec{\mathrm{v}} \neq 0$. Pour simplifier la présentation, on suppose que $\vec{\mathrm{v}}$ est un vecteur stationnaire, c'est-à-dire $\partial_t \vec{\mathrm{v}} = 0$. Le cas où $\vec{\mathrm{v}}$ dépend de t conduit à des résultats analogues.

Le principe de cette étude consiste à faire un relèvement de la condition au bord pour se ramener à des conditions aux limites homogènes. Ce relèvement induit de nouveaux termes dans le second membre de l'équation qui dépendent de $\vec{\mathrm{v}}$ et de la viscosité ν_t.

THÉORÈME 4.3.1 — *On suppose que*

(i) le couple $(\vec{v}, \rho)$ *est fixé dans* $L^2([0, \mathcal{T}], [H^1(\Omega)]^3)$,
(ii) $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$,
(iii) ν_t *est bornée dérivable de dérivée bornée,* ν_v^t *et* μ_t *sont continues bornées,* ν_v^t *et* μ_t *sont minorées par* 0 *et* ν_t *est minorée par* $\nu > 0$,
(iv) $k_0 \in L^1(\Omega)$.

Alors, le problème

$$
(4.3.1) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 + \mu_t(k)\, \partial_z \rho - k\sqrt{|k|}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = m_b\, |\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0, \end{cases}
$$

possède une solution $k \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$ *au sens des distributions.* $\diamondsuit$

La démonstration de ce résultat sera complète d'ici la fin de ce paragraphe. On rappelle que $m_b > 0$ et $\lambda \geq \nu$ sont des constantes. Il faut noter que ce résultat exige que la viscosité ν_t soit bornée dérivable de dérivée bornée, ce qui est une hypothèse assez forte ainsi que la régularité requise pour $\vec{\mathrm{v}}$. On ne connait pas les hypothèses optimales.

Il y a donc une difficulté à passer d'une condition homogène à une condition un peu plus réaliste sur le plan de la physique, liée à la régularité de la tension du vent qui est proportionnelle au carré de la trace de la vitesse de l'air à l'interface, la vitesse de l'air étant une fonction dans un espace de type H^1 en espace (*i.e.* de carré sommable ainsi que son gradient) lorsqu'elle est solution des équations primitives pour l'atmosphère (*cf.* LIONS-TEMAM-WANG [2]). La tension du vent n'est que dans un espace de type L^p sur la frontière océan-atmosphère et a priori n'y a même pas de demi-dérivée. Il est donc assez peu probable que la régularité requise pour la condition d'interface, nécessaire pour établir des résultats concernant l'équation vérifiée par l'ECT, soit celle déduite des équations primitives pour l'atmosphère lors d'un modèle couplé. Ceci débouche sur un problème ouvert difficile qui est celui de l'analyse mathématique des modèles de turbulence couplés océan-atmosphère.

Les principales étapes de ce paragraphe sont :

• relèvement de la condition au bord,
• obtention d'estimations dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$.

Une fois que l'on s'est ramené à un problème homogène, les procédés d'approximation sont ceux du paragraphe 4.1. L'équation obtenue est presque la même que celle étudiée dans les §4.1 et 4.2 aux termes supplémentaires près dans le second membre, issus du relèvement de la condition aux limites.

4.3.2 — RELÈVEMENT DE LA CONDITION AUX LIMITES

On note h la fonction définie sur Γ par

$$h(M) = m_b\,|\,\overrightarrow{\mathrm{v}}\,| \quad \text{sur} \quad \Gamma_s, \qquad h(M) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_f \cup \Gamma_l. \tag{4.3.2}$$

On considère dans ce paragraphe le cas d'un vent établi (ou encore stationnaire) et on suppose dans toute la suite que

$$h \in H^{3/2}(\Gamma). \tag{4.3.3}$$

Il existe alors $V \in W^{2,2}(\Omega)$ telle que la trace de V sur Γ soit égale à h (*cf.* BRÉZIS [1]). Posons

$$W \overset{def}{=} k - V. \tag{4.3.4}$$

De même pour $W \in I\!R$ et $M \in \Omega$, on note

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_t(W,M) = \nu_t(W + V(M)), \quad \tilde{\nu}_v^t(W,M) = \nu_v^t(W + V(M)), \\ \tilde{\mu}_t(W,M) = \mu_t(W + V(M)). \end{cases}$$

Comme ν_t, ν_v^t et μ_t sont continues, les fonctions $\tilde{\nu}_t$, $\tilde{\nu}_v^t$ et $\tilde{\mu}_t$ sont continues par rapport à W qui est la propriété utilisée par la suite. Aussi pour simplifier les notations, on note plutôt $\tilde{\nu}_t(W)$, $\tilde{\nu}_v^t(W)$ et $\tilde{\mu}_t(W)$. De même, puisque ν_t' est bornée, il en est de même pour $\partial\tilde{\nu}_t/\partial W$ noté $\tilde{\nu}_t'$.

La variable W satisfait l'équation

$$\begin{cases} (a) \quad \begin{cases} \partial_t W - \lambda\Delta W - \partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\,\partial_z W) = \tilde{\nu}_v^t(W)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 + \\ \tilde{\mu}_t(W)\,\partial_z\rho - W\,|\,W + V|^{\frac{1}{2}} - V\,|\,W + V|^{\frac{1}{2}} + \\ \lambda\Delta V + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\,\partial_z V), \end{cases} \\ (b) \quad W|_\Gamma = 0, \quad W|_{t=0} = k_0 - V \overset{def}{=} W_0. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

PROPOSITION 4.3.1 — *La fonction $k = W + V$ est une solution au sens des distributions de l'équation* (4.3.1) *si et seulement si W une solution au sens des distributions de l'équation* (4.3.5). $\diamondsuit$

Ce résultat est une conséquence directe de ce qui précède. On met maintenant en place le programme nécessaire à l'application de la proposition 4.2.1 afin d'obtenir une estimation dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ pour les suites de solutions approchées de l'équation (4.3.5) lorsque $p < 3/2$. Pour une raison technique, on le fait dans un ordre différent à celui du paragraphe précédent et en deux étapes :

- estimations $L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))$,
- estimation des troncatures.

4.3.3 — ESTIMATION $L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))$

Les hypothèses sont les hypothèses *(i)* $((\overrightarrow{v},\rho)$ fixé), *(ii)* $(\overrightarrow{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s))$, *(iii)* (hypothèses sur les viscosités) et *(iv)* $(k_0\in L^1(\Omega))$, de l'énoncé du théorème 4.3.1. L'hypothèse de bornitude des viscosités se traduit en particulier par

$$\begin{cases} \forall W\in I\!\!R, \quad 0<\nu\le Inf(\tilde{\nu}_t(W),\tilde{\nu}_v^t(W),\tilde{\mu}_t(W),\lambda)\le \\ Sup(\tilde{\nu}_t(W),\tilde{\nu}_v^t(W),\tilde{\mu}_t(W))\le\beta, \end{cases} \tag{4.3.6}$$

où β est une constante.

LEMME 4.3.1 — *Soit* $(W_j)_{j\in I\!\!N}$ *une suite telle* $\forall\, j,\ W_j\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_0(\Omega))$ *et* W_j *soit une solution du problème* (4.3.5). *Alors, la suite* $(W_j)_{j\in I\!\!N}$ *est bornée dans* $L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))$. ♢

DÉMONSTRATION — L'énoncé de ce lemme dit d'une autre manière que toute suite régulière de solution $(W_j)_{j\in I\!\!N}$ de l'équation (4.3.5) vérifie l'assertion (4.2.4).

On note W au lieu de W_j puisque ce qui suit est formel. L'application $\varphi_a=(1/a)\beta_a$, une approximation de la fonction "signe", a été définie dans l'étape 3 de la preuve du lemme 4.2.1. On choisit $\varphi_a(W)$ comme fonction test dans $(4.3.5.a)$ et on intègre par parties en espace. Il vient en utilisant directement (4.3.6),

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \psi_a(W)+\nu\int_\Omega \varphi_a'(W)\,|\nabla_c W|^2\le \\ \displaystyle\int_\Omega \tilde{\nu}_t(W)|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2\,\varphi_a(W)+ \\ \displaystyle\int_\Omega \tilde{\mu}_t(W)\,\partial_z\rho\,\varphi_a(W)+\int_\Omega \varphi_a(W)\,(\lambda\Delta V+\partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\,\partial_z V))- \\ \displaystyle\int_\Omega W\,|\,W+V|^{\frac12}\,\varphi_a(W)-\int_\Omega V\,|\,W+V|^{\frac12}\,\varphi_a(W). \end{cases} \tag{4.3.7}$$

On majore chaque terme du second membre de (4.3.7) l'un après l'autre.

Les termes de production et de flottabilité. Comme $|\varphi_a|\le 1$, on a

$$\begin{cases} \left|\displaystyle\int_\Omega \tilde{\nu}_v^t(W)\,|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2\,\varphi_a(W)\right|\le\beta||\,|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2\,||_{L^1(\Omega)}, \\ \left|\displaystyle\int_\Omega \tilde{\mu}_t(W)\,\partial_z\rho\,\varphi_a(W)\right|\le\beta\,||\,\rho\,||_{H^1(\Omega)}. \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Les terme de cascade inverse. Puisque φ_a est une fonction impaire

$$\varphi_a(W)W\ge 0,$$

donc

$$\int_\Omega \int_\Omega W \,|\, W + V |^{\frac{1}{2}} \, \varphi_a(W) \geq 0. \tag{4.3.9}$$

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Young

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_\Omega V \,|\, W + V |^{\frac{1}{2}} \, \varphi_a(W) \right| \leq \\ \dfrac{\mathcal{T}}{2} \displaystyle\int_\Omega V^2 + \dfrac{1}{2\mathcal{T}} \int_\Omega |\, V + W \,| \leq \dfrac{\mathcal{T}}{2} \int_\Omega V^2 + \dfrac{1}{2\,\mathcal{T}} \int_\Omega |\, V \,| + \dfrac{1}{2\,\mathcal{T}} \int_\Omega |\, W \,|. \end{cases}$$

De plus

$$\forall\, x \in I\!R, \quad \forall\, a \in]0,1[, \quad |\, x \,| \leq \psi_a(x) + a \tag{4.3.10}$$

où ψ_a est la primitive de φ_a s'annulant en 0. On en déduit

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega V \,|\, W + V |^{\frac{1}{2}} \, \varphi_a(W) \leq \\ \dfrac{\mathcal{T}}{2} \displaystyle\int_\Omega V^2 + \dfrac{1}{2\,\mathcal{T}} \int_\Omega |\, V \,| + \dfrac{1}{2\mathcal{T}} \int_\Omega \psi_a(W) + \dfrac{a\, mes(\Omega)}{2\mathcal{T}}. \end{cases} \tag{4.3.11}$$

Le terme de relèvement. On écrit

$$\partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\, \partial_z V) = \tilde{\nu}_t(W)\, \partial_z V + \tilde{\nu}_t'(W)\, \partial_z V . \partial_z W.$$

Comme $|\, \varphi_a(W) \,| \leq 1$, $V \in W^{2,2}(\Omega)$ et la dérivée de $\tilde{\nu}_t$ est bornée, on a

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_\Omega (\lambda \Delta V + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\, \partial_z V)\, \varphi_a(W)) \right| \leq \\ C\, \beta \,||\, V ||_{W^{2,2}(\Omega)} + \sup\limits_{x \in I\!R} (\nu_t'(x)) \displaystyle\int_\Omega |\, \partial_z V . \partial_z W|, \end{cases}$$

C est une constante qui ne dépend que de Ω. En réutilisant une fois de plus l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_\Omega (\lambda \Delta V + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\, \partial_z V))\, \varphi_a(W) \right| \leq \\ C\, \beta \,||\, V ||_{W^{2,2}(\Omega)} + \dfrac{\sup_{x \in I\!R} (\nu_t'(x))^2}{2\,\nu} \,||\, V ||^2_{W^{2,2}(\Omega)} + \dfrac{\nu}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla_c W|^2. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

Conclusion. On pose

$$\begin{cases} F_a(t) \overset{def}{=} C\, \beta \,||\, V ||_{W^{2,2}(\Omega)} + \dfrac{\sup_{x \in I\!R} (\nu_t'(x))^2}{2\,\nu} \,||\, V ||^2_{W^{2,2}(\Omega)} + \dfrac{1}{2\,\mathcal{T}} \displaystyle\int_\Omega |\, V| \\ \dfrac{\mathcal{T}}{2} \displaystyle\int_\Omega V^2 + \dfrac{a\, mes(\Omega)}{2\,\mathcal{T}} + \beta \,||\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 ||_{L^1(\Omega)} + \beta \,||\, \rho ||_{H^1(\Omega)}. \end{cases}$$

En combinant $(4.3.7, 8, 9)$, $(4.3.11, 12)$ et en tenant compte du fait que $\varphi'_a \geq 0$, on déduit que pour un temps t fixé

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi_a(W) \leq F_a(t) + \frac{1}{2\mathcal{T}}\int_\Omega \psi_a(W). \tag{4.3.13}$$

La suite $(F_a(t))_{a>0}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}])$ par une constante notée $\mathcal{C}'$ et qui ne dépend pas de a lorsque $a \in]0,1]$ (par exemple) *i.e.*

$$\forall\, a \in]0,1], \quad ||F_a(t)||_{L^1([0,\mathcal{T}])} \leq \mathcal{C}'.$$

En intégrant $(4.3.13)$ par rapport au temps sur l'intervalle $[0,t]$ puis encore sur l'intervalle $[0,\tau]$ lorsque $\tau \in [0,\mathcal{T}]$, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\tau\int_\Omega \psi_a(W)\, dM d\tau \leq \\ \displaystyle\mathcal{T}\left(\mathcal{C}' + \int_\Omega \psi_a(W_0)\, dM d\tau\right) + \frac{1}{2\mathcal{T}}\int_0^\tau\int_0^t\int_\Omega \psi_a(W)\, dM dt' dt. \end{array}\right. \tag{4.3.14}$$

Or, en intégrant par parties par rapport au temps, on a car $\psi_a \geq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\tau\int_0^t\int_\Omega \psi_a(W)\, dM dt' dt = \int_0^\tau\int_\Omega (\tau - t)\,\psi_a(W)\, dM dt \leq \\ \displaystyle\int_0^\tau\int_\Omega (\mathcal{T} - t)\,\psi_a(W)\, dM dt. \end{array}\right.$$

On en déduit en reportant cette dernière inégalité dans $(4.3.14)$

$$\int_0^\tau\int_\Omega \left(1 - \frac{\mathcal{T} - t}{2\mathcal{T}}\right)\psi_a(W) \leq \mathcal{T}\left(\mathcal{C}' + ||\, W_0||_{L^1(\Omega)} + a\right). \tag{4.3.15}$$

Comme

$$inf\left(1 - \frac{\mathcal{T} - t}{2\mathcal{T}}\right) = \frac{1}{2},$$

en intégrant une seule fois $(4.3.13)$ en temps sur l'intervalle $[0,t]$ pour t fixé et en reportant $(4.3.15)$ dans le résultat obtenu, on a pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$\int_\Omega \psi_a(W(t,M))\, dM \leq 2\,\mathcal{C}' + ||\, W_0||_{L^1(\Omega)} + a,$$

d'où lorsque $a \to 0$ par le lemme de Fatou et la positivité de ψ_a

$$\int_\Omega |\, W(t,M)|\, dM \leq 2\,\mathcal{C}' + ||\, W_0||_{L^1(\Omega)}, \tag{4.3.16}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.3.1. $\diamondsuit$

4.3.4 — ESTIMATION DES TRONCATURES

Les hypothèses sont toujours les hypothèses *(i)* $((\overrightarrow{v}, \rho)$ fixé), *(ii)* $(\overrightarrow{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s))$, *(iii)* (hypothèses sur les viscosités) et *(iv)* $(k_0 \in L^1(\Omega))$ de l'énoncé du théorème 4.3.1. Il faut maintenant vérifier que les suites de solutions de l'équation $(4.3.5)$ vérifient les assertions $(4.2.2)$ et $(4.2.3)$ en vue de l'obtention d'une estimation dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$.

LEMME 4.3.2 — *Soit* $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* *(i)* $\forall\, j,\, W_j \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$,

(ii) W_j *est une solution du problème* $(4.3.5)$.

Alors, pour tout entier n *la suite* $(\beta_n(W_j))_{j\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ *et il existe une constante* C *telle que pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\int\int_{\{n\leq |W_j|\leq n+1\}} |\nabla_c W_j|^2 \leq C. \qquad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — On montre que la suite $(\beta_n(W_j))_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$. On écrit W au lieu de W_j et on choisit $\beta_n(W)$ comme fonction test dans l'équation $(4.3.5.a)$, on intègre par parties et on majore le membre de gauche de l'égalité obtenue en tenant compte du fait que $|\beta_n| \leq n$.

La grande similitude de ce qui est fait ici avec l'analyse de la section précédente et de la section 4.2.3 autorise à ne pas écrire tous les détails. On ne s'intéresse qu'aux termes qui diffèrent par rapport au problème étudié dans la section 4.2.3 et qui sont :

$$\begin{cases} n\displaystyle\int_\Omega |\,V|\,|\,V+W|^{\frac{1}{2}}, \quad n\displaystyle\int_\Omega |W|\,|\,V+W|^{\frac{1}{2}}, \\ n\displaystyle\int_\Omega |\,\lambda\Delta V + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W)\,\partial_z V)|. \end{cases}$$

Les deux derniers termes de cette énumération se traitent comme ceux étudiés dans la section précédente en remplaçant 1 par n. En ce qui concerne le premier on écrit

$$\int_\Omega |\,V|\,|\,V+W|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\,V|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (|\,V| + |W|).$$

En appliquant le lemme 4.3.1 (estimation $L^\infty(L^1)$), il vient

$$\int_\Omega |\,V|\,|\,V+W|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\,V|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\,V| + C.$$

En raisonnant comme dans la section précédente, on établit l'existence de deux fonctions $(Y(t), Z(t)) \in [L^1([0,\mathcal{T}])]^2$ qui ne dépendent que des données du problème (et non de n) et telles que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Lambda_n(W) + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla_c \beta_n(W)|^2 \leq n\,Y(t) + Z(t),$$

Λ_n est la primitive de β_n qui s'annule en 0 (*cf.* (2.2.3)). En intégrant cette inégalité par rapport au temps sur $[0,\mathcal{T}]$ et en utilisant l'inégalité

$$\int_\Omega \Lambda_n(\beta_j(W_0)) \leq n^2\, mes(\Omega) + n\,||\,W_0||_{L^1(\Omega)},$$

(*cf.* l'étape 2 de la démonstration du lemme 4.2.1) on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \Lambda_n(W(\mathcal{T},M))\,dM + \frac{\nu}{2}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega |\nabla_c\beta_n(W)|^2 \leq \\ n\,||\,Y||_{L^1([0,\mathcal{T}])} + ||\,Z\,||_{L^1([0,\mathcal{T}])} + n^2\,mes(\Omega) + n\,||\,W_0||_{L^1(\Omega)}, \end{cases}$$

ce qui montre la première partie de l'énoncé. L'autre partie se démontre de la même manière en utilisant $g_n(W)$ comme fonction test (*cf.* l'étape 1 de la démontration du lemme 4.2.1). $\diamondsuit$

4.3.5 — CONCLUSION

On montre maintenant que l'équation $(4.3.5)$ possède une solution au sens des distributions, ce qui montre le théorème 4.3.1 grâce à la proposition 4.3.1. La méthode est la méthode de compacité.

On rapelle les principales hypothèses réécrites après avoir effectué le relèvement de la condition au bord :

- $V \in W^{2,2}(\Omega)$,
- $\tilde{\nu}_t$ est continue bornée, dérivable de dérivée bornée, minorée par $\nu > 0$,
- $\tilde{\nu}_v^t$ et $\tilde{\mu}_t$ sont continues bornées et positives.

Soit $V_j \in C^\infty(\Omega)$ telle que la suite $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers V dans $W^{2,2}(\Omega)$ fort. En raisonnant comme dans la section 4.1, on sait qu'il existe $W_j \in L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ solution faible (adapter la définition 4.1.1) de l'équation

$$(4.3.17)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t W_j - \lambda\Delta W_j - \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\,\partial_z W_j) = \\ \tilde{\nu}_v^t(W_j)\,\beta_j(|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2) + \tilde{\mu}_t(W_j)\,\partial_z\rho - W_j\,|\,W_j+V_j|^{\frac{1}{2}} - \\ V_j\,|\,W_j+V_j|^{\frac{1}{2}} + \lambda\Delta V_j + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\,\partial_z V_j), \end{cases} \\ (b) & W_j|_\Gamma = 0, \quad W_j|_{t=0} = \beta_j(W_0) = \beta_j(k_0 - V). \end{cases}$$

On notera que dans ce cas il est inutile de tronquer la viscosité $\tilde{\nu}_t$. En appliquant la proposition 4.2.1 et les lemmes 4.3.1 et 4.3.2 on voit que

— la suite $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ pour tout $p \in [1, 3/2[$ et dans $L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega))$.

On fixe $p \in [1, 3/2[$, voisin de $3/2$. On peut donc de la suite $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) telle que

— la suite $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $W \in L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ faible.

On remarque que pour tout $q \in [1, 3/2[$, $W \in L^q([0,\mathcal{T}], W^{1,q}(\Omega))$. Il faut à présent

- 1) estimer $\partial_t W_j$ pour pouvoir appliquer le lemme d'Aubin,
- 2) passer à la limite au sens des distributions dans l'équation (4.3.17) lorsque j tend vers l'infini.

• 1) On écrit

$$\begin{cases} \partial_t W_j = \lambda \Delta W_j + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\, \partial_z W_j) + \tilde{\nu}_v^t(W_j)\, \beta_j(|\, \partial_z \overrightarrow{v}\, |^2) + \\ \tilde{\mu}_t(W_j)\, \partial_z \rho - W_j\, |\, W_j + V_j|^{\frac{1}{2}} - V_j\, |\, W_j + V_j|^{\frac{1}{2}} \; + \lambda \Delta V_j + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\, \partial_z V_j). \end{cases}$$

Soit $p \in]1, 3/2[$. Comme $(W_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ et que $\tilde{\nu}_t$ est bornée

a) la suite $(\lambda \Delta W_j + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\, \partial_z W_j))_{j\in I\!N}$ est bornée dans l'espace $L^{p'}([0,\mathcal{T}], W^{-1,p'}(\Omega))$.

Comme $(V_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans $W^{2,2}(\Omega)$ et que $\tilde{\nu}_t$ est bornée

b) la suite $(\lambda \Delta V_j + \partial_z(\tilde{\nu}_t(W_j)\, \partial_z V_j))_{j\in I\!N}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H^{-1}(\Omega))$.

Le théorème d'injections de Sobolev montre que $(V_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. De plus, le corollaire 4.2.1 montre que $(W_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans $L^r([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ $(\forall\, r < 2)$. Par conséquent,

c) les suites $(W_j\, |\, W_j + V_j|^{\frac{1}{2}})_{j\in I\!N}$ et $(V_j\, |\, W_j + V_j|^{\frac{1}{2}})_{j\in I\!N}$ sont bornées dans $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$.

Enfin, puisque ν_v^t et μ_t sont bornées

d) les suites $(\tilde{\nu}_v^t(W_j)\, \beta_j(|\, \partial_z \overrightarrow{v}\, |^2))_{j\in I\!N}$ et $(\tilde{\mu}_t(W_j)\, \partial_z \rho)_{j\in I\!N}$ sont bornées dans $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$.

Il résulte des points a), b), c) et d) plus haut que la suite $(\partial_t W_j)_{j\in I\!N}$ est bornée dans

$$\begin{cases} L^{p'}([0,\mathcal{T}], W^{-1,p'}(\Omega)) + L^2([0,\mathcal{T}], H^{-1}(\Omega)) + L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega) \subset \\ L^1([0,\mathcal{T}], W^{-1,4}(\Omega)). \end{cases}$$

En raisonnant comme dans la section 4.2.5, on déduit du lemme d'Aubin que la suite $(W_j)_{j\in I\!N}$ est compacte dans $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$. À l'aide d'un argument usuel, on voit que l'on peut en extraire une sous-suite telle que

e) la suite $(W_j)_{j\in I\!N}$ converge vers W dans $L^r([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ fort (pour tout $r < 2$) et presque partout dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$.

• 2) Le passage à la limite dans l'équation $(4.2.15)$ lorsque j tend vers l'infini se fait en reprenant point par point la démonstration du lemme 4.2.5. Seuls diffèrent les termes de relèvement. Soit $\varphi \in \mathcal{D}([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$. On note que puisque $(V_j)_{j\in I\!N}$ converge vers V dans $W^{2,2}(\Omega)$ fort

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla V_j . \nabla \varphi = \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla V . \nabla \varphi.$$

Par ailleurs, grâce au point e) plus haut

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega W_j\,|\,W_j+V_j|^{\frac{1}{2}}\varphi\;=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega W\,|\,W+V|^{\frac{1}{2}}\varphi,\\ \displaystyle\lim_{j\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega V_j\,|\,W_j+V_j|^{\frac{1}{2}}\varphi\;=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega V\,|\,W+V|^{\frac{1}{2}}\varphi.\end{array}\right.$$

Enfin, comme $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers W p.p et que $\tilde{\nu}_t$ est continue et bornée, le théorème de Lebesgue montre que

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \tilde{\nu}_t(W_j)\partial_z V_j.\partial_z\varphi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \tilde{\nu}_t(W)\partial_z V.\partial_z\varphi,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.3.1. $\diamondsuit$

Maintenant on dispose de deux résultats d'existence pour l'équation satisfaite par l'énergie cinétique turbulente lorsque $(\overrightarrow{v},\rho)$ est fixé, les théorèmes 4.2.1 (cas homogène) et 4.3.1 (cas avec la tension du vent). Il faut noter que l'on n'a montré aucun résultat d'unicité pour cette équation, ce qui est un problème ouvert. On montre dans la section suivante qu'au moins une des solutions obtenue dans chaque cas est positive pour achever la démonstration des théorèmes 4.0.1 et 4.0.2.

4. 4 — POSITIVITÉ DE L'ECT

4.4.1 — ORIENTATION

L'énergie cinétique turbulente k est définie dans la section 3.1.2 par la formule $(3.2.1)$ et est a priori une variable positive. C'est pourquoi il faut montrer la positivité d'une des solutions obtenue dans les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1. Pour cela on utilise le principe du maximum. Dans ce paragraphe

- on démontre un résultat général de principe du maximum pour des équations paraboliques régulières,
- on applique ce résultat à l'équation approchée pour l'ECT que la donnée au bord soit homogène ou non puis on passe à la limite.

4.4.2 — PRINCIPE DU MAXIMUM

On se pose la question de savoir si la solution d'un problème parabolique est majorée ou/et minorée par une/des constante(s) qui ne dépend(ent) que des données et des variations possibles du second membre, c'est-à-dire des quantités supposées connues.

D'une manière générale, on considère une équation parabolique dont le second membre et les données sont contrôlées (*cf.* 4.4.2). Le principe consiste à remplacer le second membre par un autre second membre qui est constant en dehors de ce que l'on espère être la zone des variations des solutions et égal au second membre d'origine dans cette zone. On montre le principe du maximum pour le nouveau problème puis on en déduit que ses solutions sont aussi solutions du problème auquel on s'intéresse. C'est la stratégie employée tout au long de ce paragraphe.

On commence par une notation et un rappel. Étant donnée une application à valeurs réelles f, on pose

$$f^+ \stackrel{def}{=} sup(f,0), \quad f^- \stackrel{def}{=} sup(-f,0).$$

En particulier, on a

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

On dit que f^+ est la partie positive de f et f^- sa partie négative. On rappelle que

— le support de f^+ et celui de f^- sont disjoints,
— lorsque $f \in H^1(\Omega)$, $(f^+, f^-) \in [H^1(\Omega)]^2$ et

$$\int_\Omega |\nabla_c f^+|^2 = \int_{\{f\geq 0\}} |\nabla_c f|^2, \quad \int_\Omega |\nabla_c f^-|^2 = \int_{\{f<0\}} |\nabla_c f|^2.$$

On énonce et on démontre maintenant le résultat le plus général possible en positionnant d'abord le problème posé.

Soit l'équation parabolique avec x pour inconnue

$$\text{(4.4.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t x + \overrightarrow{q}.\nabla_c x - \lambda\Delta x - \partial_z(a(x)\,\partial_z x) = J(t,M,x), \\ x|_\Gamma = x_\Gamma, \quad x|_{t=0} = x^0. \end{cases}$$

On fait les hypothèses :

(H.4.1) l'application J est mesurable et bornée, continue par rapport à la variable x,

(H.4.2) l'application a est dérivable par rapport à x, bornée de dérivée bornée et a est minorée par $\nu > 0$,

(H.4.3) le champ $\overrightarrow{q}$ est dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ et $div_c\overrightarrow{q} = 0$,

(H.4.4) les données x_Γ et x^0 vérifient $(x_\Gamma, x^0) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\times L^\infty(\Omega)$,

(H.4.5) il existe $(\ell,\kappa) \in I\!R^2$ avec $\ell < \kappa$ et tel que l'application J et les données vérifient

$$\text{(4.4.2)} \qquad \begin{cases} \forall\,(t,N,M) \in [0,\mathcal{T}]\times\Gamma\times\Omega, \quad (x_\Gamma(t,N), x^0(M)) \in [\ell,\kappa], \\ \forall\,(t,M,y) \in [0,\mathcal{T}]\times\Omega\times]-\infty,\ell], \quad 0 \leq J(t,M,y), \\ \forall\,(t,M,y) \in [0,\mathcal{T}]\times\Omega\times[\kappa,\infty[, \quad J(t,M,y) \leq 0. \end{cases}$$

En raisonnant comme dans les paragraphes 4.1,2,3, on voit que les hypothèses (H.4.1,2) et (H.3,4) permettent d'affirmer que le problème $(4.4.1)$ admet une solution faible $x \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Omega))$ telle que $\partial_t x \in L^2([0,\mathcal{T}], (H^1(\Omega))')$.

Il faut noter que lorsque $x_\Gamma = 0$, il suffit de supposer que la viscosité a est continue et vérifie une hypothèse de croissance ; donc (H.4.2) est trop forte dans ce cas.

Il se pose le problème de savoir si l'équation $(4.4.1)$ possède une solution comprise entre les bornes ℓ et κ.

THÉORÈME 4.4.1 — *On suppose satisfaites les hypothèses* (H.4.1), (H.4.2), (H.4.3), (H.4.4), (H.4.5). *Alors, le problème* $(4.4.1)$ *admet une solution faible*

$$x = x(t, M) \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Omega))$$

telle que pour presque tout $(t, M) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega$

$$\ell \leq x(t, M) \leq \kappa. \tag{4.4.3}$$

♢

REMARQUE 4.4.1 — On ne démontre pas que “toute" solution de $(4.4.1)$ satisfait $(4.4.3)$. L'énoncé du théorème 4.4.1 est suffisant à notre propos. ♢

DÉMONSTRATION — On suppose satisfaites les hypothèses (H.4.1), (H.4.2), (H.4.3), (H.4.4) et (H.4.5). Soit $J_{\ell,\kappa}$ l'application définie par

$$\begin{cases} \forall\,(t, M, y) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times] - \infty, \ell], & J_{\ell,\kappa}(t, M, y) = J(t, M, \ell), \\ \forall\,(t, M, y) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [\kappa, \infty[, & J_{\ell,\kappa}(t, M, y) = J(t, M, \kappa), \\ \forall\,(t, M, y) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [\ell, \kappa], & J_{\ell,\kappa}(t, M, y) = J(t, M, y). \end{cases}$$

et soit le problème

$$\begin{cases} \partial_t x + \overrightarrow{q}.\nabla_c x - \lambda \Delta x - \partial_z(a(x)\,\partial_z(x)) = J_{\ell,\kappa}(t, M, x), \\ x|_\Gamma = x_\Gamma, \quad x|_{t=0} = x^0. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Notons que

1) $J_{\ell,\kappa}$ satisfait l'hypothèse (H.4.1),
2) $J_{\ell,\kappa} = J$ sur $[0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [\ell, \kappa]$.

De plus, les hypothèses (H.4.2,3,4) restent vérifiées. Par conséquent, le problème $(4.4.4)$ admet une solution $x = x(t, M)$. On montre par la suite que cette solution vérifie

$$\ell \leq x(t, M) \leq K \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega. \tag{4.4.5}$$

Ainsi grâce au point 2) plus haut, $x(t, M)$ est aussi une solution de $(4.4.1)$ ce qui montre le théorème.

Le but de la démonstration consiste donc à prouver que toute solution de $(4.4.4)$ vérifie $(4.4.5)$. On commence par montrer que $x(t, M) \leq \kappa$ p.p en utilisant $(\kappa - x)^-$ comme fonction test dans $(4.4.4)$. Puisque $x = x_\Gamma$ sur Γ, d'après (H.4.5) cette fonction est nulle sur Γ. Par conséquent, en intégrant par parties en espace, on trouve

$$(4.4.6)\qquad \begin{cases} < \partial_t x, (\kappa - x)^- > + \displaystyle\int_\Omega a(x)\, \nabla_c x \,.\nabla_c (\kappa - x)^- + \\ \displaystyle\int_\Omega (\kappa - x)^- \ \vec{q}\,.\nabla_c x = \int_\Omega J_{\ell,\kappa}(t, M, x)\, (\kappa - x)^-. \end{cases}$$

Par ailleurs, on vérifie en utilisant (H.4.5), le fait que $\vec{q}$ est à divergence nulle et la positivité de la fonction a, que

$$\begin{cases} < \partial_t x, (\kappa - x)^- > \ = \displaystyle\int_{\{\kappa \le x\}} \partial_t x. \,(\kappa - x) = -\frac{d}{2dt} \int_\Omega |(\kappa - x)^-|^2, \\ \displaystyle\int_\Omega a(x)\, \nabla_c x \,.\nabla_c (\kappa - x)^- = -\int_{\{\kappa \le x\}} a(x)\, |\nabla_c (\kappa - x)|^2 \le 0, \\ \displaystyle\int_\Omega J_{\ell,\kappa}(t, M, x)\, (\kappa - x)^- = -\int_{\{\kappa \le x\}} (x - K)\, J(t, M, \kappa) \ge 0, \\ \displaystyle\int_\Omega (\kappa - x)^- \ \vec{q}\,.\nabla_c x = -\frac{1}{2} \int_\Omega \vec{q}\,.\nabla_c [(\kappa - x)^-]^2 = 0. \end{cases}$$

Cette série d'égalités et d'inégalités combinées à $(4.4.6)$ conduit à

$$(4.4.7)\qquad \frac{d}{2dt} \int_\Omega |(\kappa - x)^-|^2 \le 0.$$

Comme (H.4.5) dit entre autre que $x|_{t=0} \le \kappa$ on a

$$(\kappa - x)^-|_{t=0} = 0.$$

Il résulte alors de $(4.4.7)$ et du lemme de Gronwall (*cf.* DAUTRAY-LIONS [1]) que

$$(\kappa - x)^- = 0 \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega$$

ce qui s'écrit encore

$$x(t, M) \le \kappa \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega.$$

On démontre de la même manière que

$$\ell \le x(t, M) \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega$$

en remplaçant x par $-x$ et κ par $-\ell$ ce qui achève la démonstration. $\diamondsuit$

4.4.3 — APPLICATION À L'ECT

On est en mesure de finir les démonstrations des théorèmes 4.0.1 et 4.0.2 annoncés au début de ce chapitre. Il reste à montrer que l'une au moins des solutions obtenue dans le théorème 4.2.1 (respectivement le théorème 4.3.1) est positive.

• 1) *cas homogène*. Rappelons les hypothèses.

(H.4.6) Le couple $(\vec{v}, \rho)$ est fixé dans $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^3)$,

(H.4.7) $k_0 \in L^1(\Omega)$, $k_0 \geq 0$ dans Ω p.p,

(H.4.8) les viscosités ν_t, ν_v^t et μ_t sont des fonctions continues et

$$\begin{cases} (a) & \forall\, k \in I\!R, \quad 0 < \nu \leq \inf(\nu_t(k), \lambda), \\ (b) & \nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0, \quad \forall\, k \in I\!R, \quad 0 \leq \inf(\nu_v^t(k), \mu_t(k)), \end{cases}$$

(H.4.9) les viscosités ν_v^t et μ_t sont bornées, la viscosité ν_t vérifie

$$\exists\, C \in I\!R^+, \ \exists\, \theta \in [0, 2/3[, \quad \forall\, k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1 + |\, k\,|^\theta).$$

Nous devons prouver que l'équation

$$\text{(4.4.8)} \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 + \mu_t(k)\, \partial_z \rho - k\sqrt{|k|}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = 0, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0, \end{cases}$$

possède une solution positive au sens des distributions. En raisonnant comme dans la section 4.1.1, on considère le problème approché

$$\text{(4.1.4)} \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k))\, \partial_z k) = H_j(t, M, k), \\ (b) & k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0), \end{cases}$$

où pour se mettre en position d'appliquer le théorème 4.4.1 au problème approché, on change légèrement la définition $(4.1.2)$ en posant

$$H_j(t, M, k) \stackrel{def}{=} \nu_v^t(k)\, f_j + \mu_t(k)\, g_j - \beta_{n(j)}(k\sqrt{|k|}),$$

f_j et g_j étant les régularisées de $|\, \partial_z \vec{v}\, |^2$ et $\partial_z \rho$ respectivement. On doit préciser la valeur de $n(j)$.

Comme les viscosités ν_v^t et μ_t sont bornées ainsi que les fonctions f_j et g_j, on peut considérer

$$E_j = ||\nu_v^t||_{L^\infty(I\!R)}\, ||f_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\mu_t||_{L^\infty(I\!R)}\, ||g_j||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

On choisit $n(j)$ tel que

$$n(j) = E_j + j.$$

Comme pour tout $k > (n(j))^{2/3}$, $\beta_{n(j)}(k\sqrt{|k|}) = n(j)$, on est sûr que

$$\text{(4.4.9)} \qquad \forall\, (t, M, k) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [(n(j))^{2/3}, \infty[, \quad H_j(t, M, k) < 0.$$

De plus

$$n(j) \geq j, \quad \lim_{j \to \infty} n(j) = +\infty.$$

Par conséquent, tous les raisonnements de passage à la limite effectués dans la section 4.2 restent valables dans ce cas. Par ailleurs on remarque que l'hypothèse (H.4.8, b) implique que

$$\forall\, (t, M) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega, \quad H_j(t, M, 0) = 0. \tag{4.4.10}$$

Montrons que $(4.1.4)$ possède une solution positive. Pour cela on utilise la stratégie qui consiste à modifier le second membre en posant

$$J_j(t, M, k) = H_j(t, M, k)\, \chi_{\{k \geq 0\}}$$

où

$$\chi_{\{k \geq 0\}} = 0 \quad \text{si} \quad k < 0, \quad \chi_{\{k \geq 0\}} = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq k.$$

On considère le problème

$$\begin{cases} (a) & \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k))\, \partial_z k) = J_j(t, M, k), \\ (b) & k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k|_{t=0} = \beta_j(k_0). \end{cases} \tag{4.4.11}$$

On peut appliquer à ce problème le théorème 4.4.1. En effet, d'après $(4.4.9)$ l'application J_j est telle que

$$\begin{cases} \forall\, (t, M, k) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [(n(j))^{2/3}, \infty[, & H_j(t, M, k) < 0, \\ \forall\, (t, M, k) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times] - \infty, 0[, & H_j(t, M, k) \geq 0. \end{cases}$$

Comme $0 \leq \beta_j(k_0) \leq j$ et la donnée au bord est homogène, l'hypothèse (H.4.5) du théorème 4.4.1 est satisfaite dans ce cas avec

$$\ell = 0, \quad \kappa_j = sup(j, (n(j))^{2/3}).$$

Rappelons que dans le cas homogène l'hypothèse (H.4.2) est superflue. Le fait que $\beta_j(\nu_t)$ soit bornée est ici suffisant. Finalement les hypothèses (H.4.1), (H.4.3) et (H.4.4) sont vérifiées. Par conséquent, le problème $(4.4.10)$ possède une solution k_j telle que

$$0 \leq k_j \leq \kappa_j \quad \text{p.p dans} \quad [0, \mathcal{T}] \times \Omega. \tag{4.4.12}$$

Mais comme

$$\forall\, (t, M, k) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega \times [0, \infty[, \quad H_j(t, M, k) = J_j(t, M, k),$$

k_j, qui est positive, est aussi une solution du problème $(4.1.4)$. Il faut noter que la borne supérieure dans cette dernière inégalité tend vers l'infini lorsque j tend vers l'infini.

On applique enfin à la suite $(k_j)_{j>\nu}$ les raisonnements du paragraphe 4.2. De cette suite on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)))$ faible (pour $p \in]1, 3/2[$ fixé) vers $k \in L^q([0,\mathcal{T}], W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q \in [1, 3/2[$, presque partout dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$ et telle que la fonction k soit une solution au sens des distributions du problème $(4.4.8)$. En passant à la limite presque partout dans $(4.4.12)$

$$0 \leq k \quad \text{p.p dans} \quad [0,\mathcal{T}] \times \Omega.$$

Par conséquent, k est une solution au sens des distributions du problème

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{k}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = 0, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0 \geq 0, \quad k \geq 0, \end{cases}$$

ce qui conclut entièrement la démonstration du théorème 4.0.1. $\diamondsuit$

• 2) *cas non homogène*. On rappelle que les hypothèses sont (H.4.6) ($(\vec{v}, \rho)$ fixé), (H.4.7) (hypothèse sur k_0), (H.4.8) (continuité et signe des viscosités), auxquelles s'ajoute

(H.4.10) $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$, ν_t est bornée dérivable de dérivée bornée.

Il faut montrer que le problème

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{|k|}, \end{cases} \\ (b) & k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{t=0} = k_0, \end{cases}$$

possède une solution positive au sens des distributions. Le raisonnement est exactement le même que dans le point précédent. La seule différence réside dans la donnée au bord. Mais

$$m_b|\,\vec{\mathrm{v}}\,| \geq 0, \quad m_b|\,\vec{\mathrm{v}}\,| \in L^\infty(\Gamma_s).$$

La deuxième affirmation résulte du fait que $H^{3/2}(\Gamma_s)$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\Gamma_s)$. Il suffit donc de reprendre les raisonnements précédents avec des j plus grands que $m_b||\,\vec{\mathrm{v}}\,||_{[L^\infty(\Gamma_s)]^2}$, ce qui achève cette démonstration. $\diamondsuit$

L'essentiel des outils nécessaires à l'étude des problèmes couplés est maintenant mis en place. Ceci achève la partie II et il est possible de passer à la partie III directement. Néanmoins, on termine ce chapitre par quelques remarques supplémentaires sur le système (k, ε) (*cf.* le système (3.2.20) dans la section 3.2.6).

4. 5 — REMARQUES SUR LE SYSTÈME (k, ε)

4.5.1 — ORIENTATION

Ce paragraphe peut être ommis dans une première lecture. Les résultats qu'il contient sont utiles à l'analyse du système $(M8)$ que l'on ne développe pas dans la suite (*cf.* la remarque 5.1.1, section 5.1.3, §5.1, chapitre 5).

On a introduit dans le chapitre 3 le système (k, ε). Pour simplifier, on ne prend pas les termes de flottabilité en considération et on prend des conditions de Dirichlet homogènes. Ce système s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 - \varepsilon, \\ (b) \quad \partial_t \varepsilon - \lambda \Delta \varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \varepsilon) = k|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{k}, \\ (c) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (k,\varepsilon)|_{t=0} = (k_0, \varepsilon_0). \end{cases}$$

Il n'existe à notre connaissance aucun moyen de déduire de ce système des estimations pour k et ε lorsque $\overrightarrow{v}$ est fixé dans $L^2([0,\mathcal{T}],[H^1(\Omega)]^2)$. C'est pourquoi on modifie certains termes dans les équations par troncature de manière à pouvoir

— obtenir des estimations pour k et ε dans l'espace

$$L^p([0,\mathcal{T}], L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))),$$

— assurer la positivité des variables.

Pour cela on introduit le système

$$(4.5.1) \qquad \begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 - \varepsilon sg(k), \\ (b) \quad \partial_t \varepsilon - \lambda \Delta \varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \varepsilon) = |\beta_p(k)|\,|\,\partial_z \overrightarrow{v}\,|^2 - \dfrac{\varepsilon|\varepsilon|}{\gamma_p(|k|)}, \\ (c) \quad k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (k,\varepsilon)|_{t=0} = (k_0, \varepsilon_0), \end{cases}$$

où β_j est la fonction de troncature définie dans la section 2.2.2, définition 2.2.1, formule $(2.2.1)$. La fonction γ_j est la fonction définie par

$$\begin{cases} \forall\, x\,; \quad |x| \geq \dfrac{1}{j}, \quad \gamma_j(x) = x, \\ \forall\, x\,; \quad |x| \leq \dfrac{1}{j}, \quad x \neq 0, \quad \gamma_j(x) = \dfrac{x}{j\,|x|}, \quad \gamma_j(0) = \dfrac{1}{j}, \end{cases}$$

et la fonction sg est la fonction signe.

A priori, lorsque p tend vers l'infini, les solutions positives de $(4.5.1)$ devraient tendre vers une solution du système (k, ε) lorsque p tend vers l'infini. Ce point est un problème ouvert.

4.5.2 — POSITIVITÉ DE k ET ε

Dans cette section et jusqu'à la fin de ce paragraphe on suppose que

(i) k_0 et ε_0 positives p.p dans Ω, et $(k_0, \varepsilon_0) \in [L^1(\Omega)]^2$,
(ii) Les viscosités turbulentes ν_t et ν_v^t sont des fonctions continues de k et ε, ν_t est minorée par $\nu > 0$, ν_v^t est positive.

On raisonne de manière formelle, *i.e.* sans introduire un système approché pour lequel ce que l'on fait se justifie puis en passant à la limite. On se contente des estimations à priori.

LEMME 4.5.1 — *Soit* (k, ε) *une solution faible du système* $(4.5.1)$. *Pour presque tout* $(t, M) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega$, *on a* $k(t, M) \geq 0$ *et* $\varepsilon(t, M) \geq 0$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On prouve d'abord la positivité de ε. On choisit $-\varepsilon^-$ qui est nulle sur Γ comme fonction test dans l'équation pour ε, $(4.5.1, b)$. Puisque $\varepsilon = \varepsilon^+ - \varepsilon^-$ et que les supports des fonctions intervenant dans cette décomposition sont disjoints, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{2dt}\displaystyle\int_\Omega (\varepsilon^-)^2 + \int_\Omega \nu_t(k,\varepsilon)\,|\nabla_c(\varepsilon^-)|^2 = \\ -\left(\displaystyle\int_\Omega |\,\beta_p(k)|\,|\,\partial_z \vec{v}|^2\,\varepsilon^- + \dfrac{(\varepsilon^-)^3}{\gamma_b(|\,k\,|)}\right) \leq 0 \end{cases}$$

puisque $\varepsilon^- \geq 0$. En particulier,

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega (\varepsilon^-)^2 \leq 0$$

d'où on déduit que $\varepsilon^- = 0$ p.p puisque c'est le cas au temps $t = 0$ par hypothèse. Cela signifie que $\varepsilon \geq 0$ p.p dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$. Sachant ε positif, on raisonne de la même manière en prenant $-k^-$ comme fonction test dans l'équation satisfaite par k, $(4.5.1, a)$. Étant donné que $k^- sg(k) \leq 0$ sur le support de k^- et que $\varepsilon \geq 0$, on a alors

$$-\int_\Omega k^-\,\nu_t(k)\,|\,\partial_z \vec{v}|^2 + \int_\Omega \varepsilon\, k^- sg(k) \leq 0$$

d'où

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega (k^-)^2 \leq 0.$$

On en déduit que $k^- = 0$ p.p car c'est le cas au temps $t = 0$. Par conséquent, $k \geq 0$ p.p dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$ et le lemme est démontré. $\diamondsuit$

Les solutions de $(4.5.1)$ sont les solutions positives de

$$(4.5.2) \qquad \begin{cases} (a) \quad \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z k) = \nu_v^t(k,\varepsilon)\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 - \varepsilon, \\ (b) \quad \partial_t \varepsilon - \lambda\Delta\varepsilon - \partial_z(\nu_t(k,\varepsilon)\,\partial_z \varepsilon) = \beta_p(k)\,|\,\partial_z \vec{v}\,|^2 - \dfrac{\varepsilon^2}{\gamma_p(k)}, \\ (c) \quad k|_{\partial\Omega} = 0,\ \varepsilon|_{\partial\Omega} = 0,\ (k,\varepsilon)|_{t=0} = (k_0, \varepsilon_0),\ \ k_0 \geq 0,\ \varepsilon_0 \geq 0. \end{cases}$$

Dans la section suivante on cherche une estimation pour les solutions positives à ce système.

4.5.3 — ESTIMATION $L^\infty([0, \mathcal{T}], L^1(\Omega))$

En considérant une solution positive du système $(4.5.2)$, on montre dans que les termes sources de ce système sont a priori dans $L^1([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$. La borne obtenue ne dépend que des données du problème.

En raisonnant comme dans le paragraphe 4.2 (*cf.* la remarque 4.2.3) on peut déduire à partir des équations du système $(4.5.2)$ des estimations à priori sur k et ε dans $L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$ pour tout $p < 3/2$. Il est alors possible avec ce système de reproduire le programme des paragraphes 4.2 et 4.3.

LEMME 4.5.2 — *Soit* (k,ε) *une solution positive du système* $(4.5.2)$. *Alors,*

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sup\left(||\,\varepsilon\,||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))}, \left|\left|\dfrac{\varepsilon^2}{\gamma_b(k)}\right|\right|_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}\right) \leq \\ p\,||\,|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2||_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\,\varepsilon_0||_{L^1(\Omega)}, \end{array}\right. \\ ||\,k\,||_{L^\infty([0,\mathcal{T}],L^1(\Omega))} \leq \beta\,||\,|\,\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2||_{L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\,k_0||_{L^1(\Omega)}, \end{array}\right.$$

et ce, en supposant les données initiales k_0 et ε_0 toutes deux dans $L^1(\Omega)$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On traite d'abord l'équation satisfaite par ε, en utilisant $\varphi_a(\varepsilon)$ comme fonction test dans ladite équation (φ_a est une approximation de la fonction signe). Sachant que $\beta_p \leq p$ et que $\varphi_a \leq 1$ on en déduit

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \psi_a(\varepsilon) + \int_\Omega \varphi_a'(\varepsilon)\,\nu_t(k,\varepsilon)\,|\nabla_c\varepsilon\,|^2 + \int_\Omega \varphi_a(\varepsilon)\,\frac{\varepsilon^2}{\gamma_b(k)} \leq p\int_\Omega |\,\partial_z\overrightarrow{v}|^2.$$

On rappelle que $\varphi_a' \geq 0$. En ne considérant pas la partie diffusive (qui est positive) dans le membre de gauche de cette inégalité, on intègre cette dernière par rapport au temps sur l'intervalle $[0,t]$. On fait tendre ensuite a vers zéro en notant que $\varphi_a(\varepsilon)$ converge vers 1 presque partout lorsque a tend vers 0 (ce qui se déduit de la positivité de ε). On a alors

$$\int_\Omega \varepsilon(t,M)\,dM + \int_0^t\int_\Omega \frac{\varepsilon^2}{\gamma_b(k)} \leq p\,||\,|\partial_z\overrightarrow{v}\,|^2||^2_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + ||\,\varepsilon^0||_{L^1(\Omega)}.$$

La première inégalité du lemme est ainsi démontrée. La deuxième se déduit directement de la positivité de ε en appliquant le même procédé et en utilisant cette fois-ci $\varphi_a(k)$ comme fonction test dans l'équation satisfaite par k. $\diamondsuit$

CHAPITRE 5

COUPLAGES D'ÉQUATIONS SCALAIRES

ORIENTATION

1) On étudie dans ce chapitre le problème posé par le système $(M3)$ obtenu à la fin du chapitre 3

$$(M3) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t \rho - \mathcal{K}_h \Delta \rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho) = F(\rho), \\ (b) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\nabla \rho\,|^2 - k\, \sqrt{|\, k\,|}\; + \mu_t(k)\, \partial_z \rho, \end{cases} \\ (c) & \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha \rho, \\ (d) & k|_{\,\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k|_{\,\Gamma_s} = m_b\, |\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \\ (e) & (\rho, k)|_{t=0} = (\rho^0, k_0), \end{cases}$$

$\mathcal{K}_h > 0$, $\nu > 0$, $\lambda \geq \nu$ et sont des constantes. Les hypothèses générales sont :

(H.5.1) $(\rho^0, k_0) \in L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $k_0 \geq 0$ p.p dans Ω,

(H.5.2) F est une fonction continue de ρ et il existe une constante C telle que

$$\forall\, \rho \in I\!R, \quad |F(\rho)| \leq C(1 + |\rho|),$$

(H.5.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont des fonctions continues, ν_v^t et μ_t sont positives, ν_t est minorée par $\nu > 0$ et il existe une constante C telle que

$$\forall\, k \in I\!R, \quad \nu_v^t(k) \leq C(1 + \mu_t(k)),$$

$\mu_t(0) = \nu_v^t(0) = 0.$

On distingue les cas où

μ_t est une fonction bornée,
μ_t n'est pas une fonction bornée.

2) Lorsque μ_t est une fonction bornée on montre dans le §5.1 un résultat d'existence d'une solution au sens des distributions à $(M3)$ lorsque

- $\vec{v}=0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists\, C \in I\!R^+,\ \ \exists\, \theta \in [0, 2/3[,\ \ \forall\, k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1+|\, k\,|^\theta),$$

- $\vec{v}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée.

Dans les deux cas la stratégie est la même. En partant de solutions approchées (ρ_j, k_j), on obtient des estimations puis on passe à la limite lorsque j tend vers l'infini.
Les estimations sont déduites des méthodes standard et des techniques du chapitre 4. Le point délicat est le passage à la limite dans le terme de production $\nu_v^t(k_j)\,|\nabla\rho_j\,|^2$ présent dans l'équation pour k, $(M3, b)$. Pour passer à la limite dans ce terme, il faut montrer que la suite $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge fortement vers sa limite faible dans l'espace $L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$. Cette convergence s'obtient en montrant que l'égalité d'énergie est préservée à la limite dans l'équation pour la densité $(M3, a)$. C'est là que l'hypothèse "μ_t bornée" joue un rôle crucial.

3) Lorsque μ_t n'est pas bornée on ne peut plus raisonner directement avec une égalité d'énergie. Pour mieux situer cette difficulté on étudie non plus le système $(M3)$ mais le système simplifié stationnaire

$$(5.0.1) \qquad \begin{cases} (a) \quad -\,div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c\rho) = f, \\ (b) \quad -\,div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c k) = \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2, \\ (c) \quad k|_{\,\partial\Omega} = \rho|_{\,\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

On suppose juste dans ce système que ν_t est une fonction continue minorée par $\nu > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$ est donnée.
Les termes $-div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c\rho)$ et $-div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c k)$ ne sont a priori pas définis lorsque l'on ne fait aucune hypothèse de croissance sur ν_t. Pour donner un sens au système $(5.0.1)$ on utilise et on adapte la notion de "*solution renormalisée*" due à R. J. DI PERNA et P. L. LIONS [1], mise au point initialement pour d'autres types de problèmes (équation de Boltzmann par exemple) et reprise dans LIONS-MURAT [1] et MURAT [1] pour les problèmes elliptiques.
Après avoir défini ce que l'on entend par "*solution renormalisée*" du système $(5.0.1)$ (*cf.* §5.2), on

— montre la consistance de la définition,
— montre l'existence d'une solution renormalisée au système $(5.0.1)$.

La définition donnée est consistante à condition qu'une solution renormalisée soit aussi une solution au sens des distributions dans le cas ν_t bornée.
On montre l'existence d'une solution renormalisée à partir de solutions approchées (ρ_j, k_j) (*cf.* §5.3). Le point principal de la démonstration consiste à établir que les troncatures de la limite des approximations $(\rho_j)_{j>\nu}$ vérifient l'égalité d'énergie pour déduire la convergence forte de $(\rho_j)_{j>\nu}$ dans $H^1_0(\Omega)$.

5. 1 — CAS DES VISCOSITÉS BORNÉES

5.1.1 — RÉSULTAT D'EXISTENCE

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème d'existence 5.1.1.

THÉORÈME 5.1.1 — *On suppose que les hypothèses* (H.5.1) *(sur les données initiales),* (H.5.2) *(F sous linéaire) et* (H.5.3) *(sur les viscosités) sont réalisées et que μ_t est bornée. Alors, le système $(M3)$ possède une solution (ρ, k) au sens des distributions dans les deux cas suivants :*

i) $\vec{\mathrm{v}}= 0$ *et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance*

$$\exists\, C \in I\!R^+,\ \ \exists\, \theta \in [0, 2/3[,\ \ \forall\, k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \le C(1 + |\, k\,|^{\theta}),$$

ii) $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ *et ν_t est bornée dérivable de dérivée bornée.*

De plus dans les deux cas

$$(\rho, k) \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times \bigcap_{1 \le p < 3/2} L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$$

et il existe $q_0 > 1$ *tel que*

$$(\partial_t \rho, \partial_t k) \in L^2([0, \mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))') \times L^1([0, \mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega)).$$

Enfin $k \ge 0$ p.p dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$. $\diamondsuit$

On rappelle que

$$H^1_{f,l}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega),\ u|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0 \right\}.$$

La démonstration sera complète d'ici la fin de ce paragraphe. Elle suit le shéma de la méthode de compacité en tenant compte de la difficulté due au terme de production $\nu^t_v(k)\, |\nabla \rho\,|^2$ dans l'équation pour k, $(M3, b)$.

- On part de solutions approchées (ρ_j, k_j) pour lesquelles on obtient des estimations a priori ainsi que pour $(\partial_t \rho_j, \partial_t k_j)_{j>\nu}$,
- on extrait des sous-suites convergentes faiblement vers un couple (ρ, k) et fortement suivant les espaces via le lemme d'Aubin,
- on passe à la limite dans les équations en prouvant grâce à l'égalité d'energie que $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge fortement vers ρ dans $L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ fort.

Avant de mettre ce programme en œuvre quelques commentaires s'imposent.

1) La positivité de la solution k résulte de la positivité de k_0 et des résultats du paragraphe 4.4 du chapitre 4 et ce, indifféremment dans le cas homogène et dans le cas non homogène. C'est la raison pour laquelle on impose $\mu_t(0) = \nu^t_v(0) = 0$.

2) L'analyse du cas homogène est suffisante à l'obtention du résultat. En effet, on sait grâce au paragraphe 4.3 du chapitre 4 que la différence entre les cas homogène et non homogène réside dans l'obtention d'estimations a priori pour k dans $L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$. Partant du cas non homogène on se ramène à l'homogène après un relèvement de la condition aux limites. La difficulté supplémentaire provient des termes additionnels dans l'équation issus du relèvement de la condition aux limites. À cause d'eux on est contraint de remplacer l'hypothèse de croissance par "$\overrightarrow{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée".

3) Des résultats analogues sont montrés dans BARANGER-MIKELIC [1], BLANCHARD-GUIBÉ [1], CLAIN [1], GALLOUËT-HERBIN [1], LEWANDOWSKI [1]. Ils concernent des systèmes couplés ayant une structure voisine de $(M3)$ avec des viscosités bornées et proviennent de problèmes physiques différents de ceux de l'océanographie.

5.1.2 — SOLUTIONS APPROCHÉES ET ESTIMATIONS A PRIORI

On considère le cas homogène $\overrightarrow{\mathrm{v}} = 0$ et on suppose que

— μ_t est bornée (et donc aussi ν_v^t, *cf.* (H.5.3)).ÃÐ

Les hypothèses (H.5.1) ($(\rho^0, k_0) \in L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$), (H.5.2) ($F$ sous linéaire) et (H.5.3) (ν_v^t et μ_t continues positives nulles en zéro et $\nu_t \geq \nu$) sont satisfaites. Enfin, ν_t satisfait l'hypothèse de croissance $\nu_t(k) \leq C(1+|k|^\theta)$ avec $\theta < 2/3$.

Dans cette section, on introduit une suite de solutions approchées au système $(M3)$ et on établit dans le lemme 5.1.1 plus loin les estimations nécessaires au passage à la limite dans les équations.

En raisonnant comme dans la section 4.1 du paragraphe 4 on construit par la méthode de temps de retard une solution faible (ρ_j, k_j) au système (*cf.* remarque 4.1.1 section 4.1.3, §4.1, chapitre 4)

$$(5.1.1)\qquad \begin{cases} (a) \quad \partial_t \rho_j - \mathcal{K}_h \Delta \rho_j - \partial_z((\mu_t(k_j) + \nu)\,\partial_z \rho_j) = F(\rho_j), \\ (b) \quad \begin{cases} \partial_t k_j - \lambda \Delta k_j - \partial_z(\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j) = \\ \nu_v^t(k_j)\,\beta_j(|\nabla \rho_j|^2) - \beta_j(k_j\sqrt{|k_j|}) + \mu_t(k_j)\,\partial_z \rho_j, \end{cases} \\ (c) \quad \rho_j|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k_j) + \nu)\,\partial_z \rho_j|_{\Gamma_s} = -\alpha \rho_j, \\ (d) \quad k_j|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad k_j|_{\Gamma_s} = 0, \\ (e) \quad (\rho_j, k)|_{t=0} = (\rho^0, \beta_j(k_0)), \end{cases}$$

où pour tout j

$$(5.1.2)\qquad \begin{cases} (\rho_j, k_j) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega) \times H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^2), \\ (\partial_t \rho_j, \partial_t k_j) \in L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))' \times H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

On rappelle que β_j est la fonction de troncature à hauteur j (*cf.* definition 2.3.1, section 2.3.2, §2.3, chapitre 2). Par ailleurs, comme F est sous linéaire (*cf.* (H.5.2))

$$(5.1.3)\qquad F(\rho_j) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], L^2(\Omega)).$$

Enfin

$$\nu_v^t(k_j)\,\beta_j(|\nabla\rho_j\,|^2)-\beta_j(k_j\sqrt{|\,k_j\,|})+\mu_t(k_j)\,\partial_z\rho_j\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega). \tag{5.1.4}$$

Les remarques $(5.1.2)$, $(5.1.3)$ et $(5.1.4)$ montrent que l'on peut prendre dans le système $(5.1.1)$ des tests dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)\times H^1_0(\Omega))$ qui admet comme formulation faible :

$$\left\{\begin{array}{l}
\forall\,(\hat\rho,\hat k)\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)),\quad \forall\,t\in[0,\mathcal{T}],\\
(a)\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^t <\partial_t\rho_j,\hat\rho>\,+\mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega\nabla\rho_j.\nabla\hat\rho\,+\,\alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j\,\hat\rho+\\
\displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k_j)+\nu)\,\partial_z\rho_j\,\partial_z\hat\rho=\int_0^t\int_\Omega F(\rho_j)\,\hat\rho,\end{array}\right.\\
(b)\quad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^t <\partial_t k_j,\hat k>\,+\lambda\int_0^t\int_\Omega\nabla k_j.\nabla\hat k+\\
\displaystyle\int_0^t\int_\Omega\beta_j(\nu_t(k_j))\,\partial_z k_j\,\partial_z\hat k\,=\int_0^t\int_\Omega\mu_t(k_j)\,\partial_z\rho_j\,\hat k+\\
\displaystyle\int_0^t\int_\Omega\nu_v^t(k_j)\,\beta_j(|\nabla\rho_j\,|^2)\,\hat k\,-\int_0^t\int_\Omega\beta_j(k_j\sqrt{|\,k_j\,|})\,\hat k.\end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{5.1.5}$$

Dans ce qui précède tous les termes ont un sens car on fait l'hypothèse que μ_t est bornée, ce qui est aussi le cas pour $\beta_j(\nu_t)$ qui est la tronquée de ν_t.

LEMME 5.1.1 — *i) Pour tout $p<3/2$ la suite $(\rho_j,k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans*

$$L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))\times L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}_0(\Omega)),$$

ii) la suite $(\partial_t\rho_j,\partial_t k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans

$$L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')\times L^1([0,\mathcal{T}],W^{-1,q_0}(\Omega)). \qquad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — *i) Estimation pour $(\rho_j,k_j)_{j>\nu}$.* On considère en premier lieu la suite $(\rho_j)_{j>\nu}$. Dans $(5.1.5,a)$ on prend $\rho_j=\hat\rho$ comme fonction test avec

$$<\partial_t\rho_j,\rho_j>=\frac{d}{2\,dt}\int_\Omega\rho_j^2$$

(*cf.* DAUTRAY-LIONS ÃÐ[1]). Comme $\rho^0\in L^2(\Omega)$, il en résulte l'égalité d'énergie

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\frac12\int_\Omega\rho_j^2-\frac12\int_\Omega(\rho^0)^2+\mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega|\nabla\rho_j|^2\,+\alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j^2+\\
\displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k_j)+\nu)\,|\partial_z\rho_j|^2=\int_0^t\int_\Omega F(\rho_j)\,\rho_j.\end{array}\right. \tag{5.1.6}$$

La sous linéarité de F (*cf.* (H.5.2)) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraînent

$$\left|\int_0^t \int_\Omega F(\rho_j)\,\rho_j\right| \leq C\int_0^t \int_\Omega \rho_j^2 \tag{5.1.7}$$

qui combinée à la positivité des viscosités et $(5.1.6)$ montre l'existence d'une constante $C = C(\Omega, F)$ telle que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_j^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho^0)^2 + C\int_0^t \int_\Omega \rho_j^2.$$

Par conséquent, d'après le lemme de Gronnwall (*cf.* DAUTRAY-LIONS ÃĐ[1]) on déduit que pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_j^2 \leq C,$$

$C = C(\Omega, F, \rho^0)$ est une constante. On reporte cette inégalité dans $(5.1.6)$ combinée à $(5.1.7)$, la positivité de μ_t et le fait que $\lambda \geq \nu$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \rho_j^2 + \nu\int_0^t \int_\Omega |\nabla_c \rho_j|^2 \leq C = C(\Omega, F, \rho^0) \tag{5.1.8}$$

ce qui montre que $(\rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], L^2(\Omega))$. Comme μ_t et ν_v^t sont bornées

$\nu_v^t(k_j)\,|\nabla \rho_j|^2$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$,
$\mu_t(k_j)\,\partial_z \rho_j$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$.

Ces derniers points combinés au signe de la non linéarité $\beta_j(k_j\sqrt{|k_j|})$ et aux résultats du paragraphe 4.2 (*cf.* la remarque 4.2.3) entraînent que la suite $(k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega))$ pour tout $p < 3/2$.

Dans le cas non homogène, un résultat analogue a lieu lorsque $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée dérivable de dérivée bornée (*cf.* §4.3).

ii) Estimations pour $(\partial_t \rho_j, \partial_t k_j)_{j>\nu}$. D'après les résultats précédents, le lemme 4.2.4 (*cf.* section 4.2.4) et l'hypothèse de croissance $(4.2.36)$ sur ν_t (c'est plus simple dans le cas non homogène où ν_t est bornée)

$(\partial_t k_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega))$

pour un certain $q_0 > 1$ qu'il est inutile de préciser. Il reste à estimer $(\partial_t \rho_j)_{j>\nu}$. On choisit dans $(5.1.5, a)$ des tests particuliers de la forme $\phi(t)\psi(M)$ où $\phi \in \mathcal{D}([0,\mathcal{T}])$ et $\psi \in H^1_{f,l}(\Omega)$. Ainsi pour chaque $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$\left\{\begin{array}{l} < \partial_t \rho_j, \psi >= -\mathcal{K}_h \displaystyle\int_\Omega \nabla \rho_j . \nabla \psi - \\ \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_s} \rho_j\,\psi - \int_\Omega (\mu_t(k_j) + \nu)\,\partial_z \rho_j\,\partial_z \psi + \int_\Omega F(\rho_j)\,\psi, \end{array}\right. \tag{5.1.9}$$

On étudie chaque terme du membre de droite de $(5.1.9)$ l'un après l'autre. Dans toute la démonstration, C est une constante en général qui ne dépend que des données et de Ω et non de j.

Termes de diffusion. On a

$$\left|\mathcal{K}_h \int_\Omega \nabla\rho_j.\nabla\psi\right| \leq \mathcal{K}_h ||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)} ||\psi||_{H^1_{f,l}(\Omega)}. \tag{5.1.10}$$

De même, puisque μ_t *est bornée*

$$\left|\int_\Omega (\mu_t(k_j)+\nu)\,\partial_z\rho_j\,\partial_z\psi\right| \leq C||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)} ||\psi||_{H^1_{f,l}(\Omega)}. \tag{5.1.11}$$

Enfin, en utilisant le théorème de traces

$$\left|\alpha \int_{\Gamma_s} \rho_j\,\psi\right| \leq C||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)} ||\psi||_{H^1_{f,l}(\Omega)}. \tag{5.1.12}$$

Termes source. Puisque F est sous linéaire

$$\left|\int_\Omega F(\rho_j)\,\psi\right| \leq C\int_\Omega (1+|\rho_j|)\,|\psi| \leq C(1+||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)})||\psi||_{H^1_{f,l}(\Omega)}, \tag{5.1.13}$$

Conclusion. En combinant les inégalités $(5.9, 10, 11, 12, 13)$ on a

$$\forall\,\psi \in H^1_{f,l}(\Omega), \quad |<\partial_t\rho_j, \psi>| \leq C(1+||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)})||\psi||_{H^1_{f,l}(\Omega)}.$$

Donc pour chaque $t \in [0, \mathcal{T}]$

$$\partial_t\rho_j \in (H^1_{f,l}(\Omega))', \quad ||\partial_t\rho_j||_{(H^1_{f,l}(\Omega))'} \leq C(1+||\rho_j||_{H^1_{f,l}(\Omega)}).$$

Comme $(\rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ il résulte de cette dernière inégalité que $(\partial_t\rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$. $\diamondsuit$

Il se pose maintenant le problème de faire tendre j vers l'infini dans les équations.

5.1.3 — PASSAGE À LA LIMITE ET CONCLUSION

On doit maintenant

1) extraire une sous-suite convergente de la suite $(\rho_j, k_j)_{j>\nu}$,
2) passer à la limite dans les équations.

1) *Extraction d'une sous-suite.* Soit $p \in [1, 3/2[$ proche de $3/2$.

LEMME 5.1.2 — *Il existe*

$$(\rho, k) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}_0(\Omega))$$

de sorte que l'on puisse extraire de la suite $(\rho_j, k_j)_{j>\nu}$ une sous-suite (notée de la même manière) telle que

- *i)* $(\rho_j, k_j)_{j>\nu}$ *converge vers* (ρ, k) *faiblement dans*

$$L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}_0(\Omega)),$$

- *ii)* $(k_j)_{j>\nu}$ *converge vers* k *p.p dans* $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$ *et fortement dans* $L^r([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ *pour tout* $r < 2$,
- *iii)* $(\rho_j)_{j>\nu}$ *converge vers* ρ *p.p et dans* $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ *fort.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — Le point *i)* résulte du lemme 5.1.1 ainsi que le point *ii)* en raisonnant comme dans les sections 4.2.1, 4.2.4 et 4.2.5 du chapitre 4. Enfin, comme $(\partial_t \rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$ elle est à fortiori bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^{-1}(\Omega))$. De plus, on les injections continues

$$H^1_{f,l}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

la première injection étant compacte grâce au théorème d'injections de Sobolev. Le point *iii)* est une conséquence du fait que la suite $(\rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et du lemme d'Aubin. On note que $k \in L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}_0(\Omega))$ pour tout $p < 3/2$ (*cf.* section 4.2.5).

2) *Passage à la limite dans les équations*. On raisonne en trois temps :

— passage à la limite dans l'équation pour la densité,
— convergence forte $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$,
— passage à la limite dans l'équation pour k.

Les deux premiers temps font l'objet des lemmes intermédiaires 5.1.3 et 5.1.4, le dernier de la conclusion de la démonstration du théorème 5.1.1.

LEMME 5.1.3 — *Soit* (ρ, k) *la limite de* $(\rho_j, k_j)_{j>\nu}$. *Alors,*

$$\begin{cases} (a) \quad \partial_t \rho - \mathcal{K}_h \Delta \rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho) = F(\rho), \\ (b) \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha \rho. \end{cases}$$

Cette équation est satisfaite au sens faible avec $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ *comme espace de fonctions tests.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — Soient $\hat\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et $t \in [0,\mathcal{T}]$. Pour chaque j

$$(5.1.14) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t < \partial_t \rho_j, \hat\rho > + \mathcal{K}_h \int_0^t \int_\Omega \nabla \rho_j . \nabla \hat\rho \,+\, \alpha \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho_j\, \hat\rho + \\ \displaystyle\int_0^t \int_\Omega (\mu_t(k_j) + \nu)\, \partial_z \rho_j\, \partial_z \hat\rho = \int_0^t \int_\Omega F(\rho_j)\, \hat\rho. \end{cases}$$

On étudie les termes de $(5.1.14)$ les uns après les autres.

Termes de diffusion. D'après le lemme 5.1.2

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \nabla\rho_j.\nabla\hat{\rho}=\int_0^t\int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat{\rho}. \tag{5.1.15}$$

De même, l'application linéaire "trace" étant continue de $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^{1/2}(\Gamma_s))$

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_{\Gamma_s} \rho_j\,\hat{\rho}=\int_0^t\int_{\Gamma_s} \rho\,\hat{\rho}. \tag{5.1.16}$$

Enfin, comme

— μ_t est bornée et continue
— $(k_j)_{j>\nu}$ converge vers k p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$,

la suite $((\mu_t(k_j)+\nu)\,\partial_z\hat{\rho})_{j>\nu}$ converge vers $(\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\hat{\rho}$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort. Comme $(\partial_z\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $\partial_z\rho$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible, il en résulte que

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k_j)+\nu)\,\partial_z\rho_j\,\partial_z\hat{\rho}=\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho\,\partial_z\hat{\rho}. \tag{5.1.17}$$

Termes source. Comme $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort, l'hypothèse de sous linéarité de F et sa continuité assurent que $(F(\rho_j))_{j>\nu}$ converge vers $F(\rho)$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort. Il en résulte que

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega F(\rho_j)\ \hat{\rho}=\int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\hat{\rho}. \tag{5.1.18}$$

Terme d'évolution. Comme $(\partial_t\rho_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faible étoile vers un certain

$$g\in L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))').$$

Soit alors $\phi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}],\mathcal{E})$ (*cf.* définition 2.1.1, section 2.1.2, chapitre 2). Par définition

$$\int_0^{\mathcal{T}} <\partial_t\rho_j,\phi> = -\int_0^{\mathcal{T}} <\rho_j,\partial_t\phi> = -\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_j\,\partial_t\phi.$$

On a

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}} <\partial_t\rho_j,\phi> = \int_0^{\mathcal{T}} <g,\phi>.$$

Par ailleurs, la convergence forte de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ implique

$$\lim_{j\to\infty}\left(-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\rho_j\,\partial_t\phi\right)=-\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\rho\,\partial_t\phi=\int_0^{\mathcal{T}}<\partial_t\rho,\phi>.$$

Puisque $\mathcal{D}([0,\mathcal{T}],\mathcal{E})$ est partout dense dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$, il en résulte que $g=\partial_t\rho$.

Conclusion. Lorsque l'on combine ce qui précède à $(5.1.14, 15, 16, 17, 18)$, on obtient pour tout $\hat\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$

$$(5.1.19)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t <\partial_t\rho,\hat\rho> \, +\mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat\rho \,+\, \alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho\,\hat\rho\, + \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho\,\partial_z\hat\rho = \int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\hat\rho. \end{cases}$$

Il faut noter que pour que $(5.1.19)$ ait lieu pour tout $\hat\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$, il est crucial que μ_t soit bornée sinon cela n'aurait pas de sens. $\diamondsuit$

LEMME 5.1.4 — *La suite $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ fort.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — En prenant $\hat\rho=\rho$ comme fonction test dans $(5.1.19)$ on obtient pour tout $t\in[0,\mathcal{T}]$ l'égalité d'énergie

$$(5.1.20)\qquad \begin{cases} \displaystyle\frac12\int_\Omega\rho^2-\frac12\int_\Omega(\rho^0)^2+\mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega|\nabla\rho|^2\,+\alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho^2+ \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,|\partial_z\rho|^2=\int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\rho \end{cases}$$

tandis-que chaque ρ_j satisfait l'egalité d'énergie $(5.1.6)$. On commence par montrer à l'aide de ces deux informations que

$$(5.1.21)\qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{j\to\infty}\Bigg(\mathcal{K}_h\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\rho_j|^2\,+\alpha\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j^2+ \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k_j)+\nu)\,|\partial_z\rho_j|^2\Bigg)\;= \\ \displaystyle\mathcal{K}_h\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\rho|^2\,+\alpha\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho^2+ \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,|\partial_z\rho|^2. \end{cases}$$

Pour cela, on intègre simultanément les égalités d'énergie $(5.1.6)$ et $(5.1.20)$ par rapport au temps sur $[0,\mathcal{T}]$. Il vient

$$(5.1.22)\qquad \begin{cases} \displaystyle\mathcal{K}_h\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega|\nabla\rho_j|^2\,+\alpha\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j^2+ \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k_j)+\nu)\,|\partial_z\rho_j|^2\;= \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega F(\rho_j)\,\rho_j+\frac12\,\mathcal{T}\int_\Omega(\rho^0)^2-\frac12\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\rho_j^2, \end{cases}$$

$$(5.1.23)\qquad \begin{cases} \mathcal{K}_h \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega |\nabla \rho|^2 \; + \alpha \int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho^2 + \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega (\mu_t(k) + \nu)\, |\partial_z \rho|^2 \; = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\, \rho + \frac{1}{2}\, \mathcal{T} \int_\Omega (\rho^0)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \rho^2. \end{cases}$$

Or

— F est continue et sous linéaire (hypothèse (H.5.2)),
— $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ fort et p.p dans $[0,\mathcal{T}] \times \Omega$.

Il en résulte que

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{j\to\infty} \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega F(\rho_j)\, \rho_j + \frac{1}{2}\, \mathcal{T} \int_\Omega (\rho^0)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \rho_j^2 \right) \; = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\, \rho + \frac{1}{2}\, \mathcal{T} \int_\Omega (\rho^0)^2 - \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \rho^2 \end{cases}$$

ce qui combiné à $(5.1.22)$ et $(5.1.23)$ démontre $(5.1.21)$.

La convergence de énergies $(5.1.21)$ est cruciale car elle implique

$$(5.1.24)\qquad \forall\, \mathcal{T}' < \mathcal{T}, \quad \lim_{j\to\infty} \int_0^{\mathcal{T}'} \int_\Omega |\nabla_c \rho_j|^2 = \int_0^{\mathcal{T}'} \int_\Omega |\nabla_c \rho|^2$$

qui combinée à la convergence faible de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ assure la convergence forte dans $L^2([0,\mathcal{T}'], H^1_{f,l}(\Omega))$ pour tout $\mathcal{T}' < \mathcal{T}$. Cela étant toutes les constructions précédentes sur l'intervalle $[0,\mathcal{T}]$ peuvent être faites de la même manière sur l'intervalle de temps $[0, 2\mathcal{T}]$. Donc on peut déclarer sur la base de $(5.1.24)$ la convergence forte de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$. On donne maintenant les détails de la démonstration.

Grâce à

— la convergence de $(\rho_j)_{j>\nu}$ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible vers ρ,
— la continuité de μ_t et le fait qu'elle soit bornée,
— la convergence p.p de $(k_j)_{j>\nu}$ vers k,
— la continuité de l'application trace,

on a les inégalités

$$(5.1.25)\qquad \begin{cases} (a) \quad \mathcal{K}_h \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega |\nabla \rho|^2 \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\mathcal{K}_h \int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_\Omega |\nabla \rho_j|^2 \right), \\ (b) \quad \alpha \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho^2 \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\alpha \int_0^{\mathcal{T}} \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho_j^2 \right), \end{cases}$$

$$(5.1.25.c)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega (\mu_t(k)+\nu)\,|\partial_z\rho|^2 \leq \\ \displaystyle\liminf_{j\to\infty}\left(\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega (\mu_t(k_j)+\nu)\,|\partial_z\rho_j|^2\right), \end{cases}$$

Toutes quantités étant positives, il résulte de $(5.1.21)$ combiné à $(5.1.25)$

$$(5.1.26)\qquad \begin{cases} (a) \quad \mathcal{K}_h\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\rho|^2 = \lim_{j\to\infty}\left(\mathcal{K}_h\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\rho_j|^2\right), \\ (b) \quad \alpha\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho^2 = \lim_{j\to\infty}\left(\alpha\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j^2\right) \\ (c) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega (\mu_t(k)+\nu)\,|\partial_z\rho|^2 = \\ \displaystyle\lim_{j\to\infty}\left(\int_0^{\mathcal{T}}\int_0^t\int_\Omega (\mu_t(k_j)+\nu)\,|\partial_z\rho_j|^2\right), \end{cases} \end{cases}$$

ce qui est presque $(5.1.24)$ mais il faut encore travailler à partir de $(5.1.26)$ pour obtenir la convergence forte des gradients. On le fait en deux temps en montrant d'abord la convergence forte dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^2$ de $(\nabla\rho_j)_{j>\nu}$ puis celle de $(\partial_z\rho_j)_{j>\nu}$.

La convergence faible de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ entraîne la convergence faible de $(\nabla\rho_j)_{j>\nu}$ vers $\nabla\rho$ dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^2$. L'égalité $(5.1.26,a)$ implique alors que cette convergence est forte (en fait pour tout $\mathcal{T}'<\mathcal{T}$...).

Soit

$$g_j \stackrel{def}{=} \sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\,\partial_z\rho_j.$$

La suite $(g_j)_{j>\nu}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ d'après $(5.1.26,c)$. On peut donc en extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) telle que $(g_j)_{j>\nu}$ converge vers un certain $g\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible.

Soit $h\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ un test fixé. On a

$$(5.1.27)\qquad \lim_{j\to\infty}\left(\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\,\partial_z\rho_j\,h\right) = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega g\,h.$$

Par ailleurs, puisque

— μ_t est bornée et continue,
— $(k_j)_{j>\nu}$ converge vers k p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$,

on a grâce au théorème de Lebesgue

$$(5.1.28)\quad \lim_{j\to\infty}\left(\sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\,h\right) = \sqrt{(\mu_t(k)+\nu)}\,h \quad \text{dans } L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega) \text{ fort.}$$

Comme $(\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible, $(\partial_z\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers $\partial_z\rho$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible. On obtient grâce à $(5.1.28)$

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\,\partial_z\rho_j\,h\right)=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega\sqrt{(\mu_t(k)+\nu)}\,\partial_z\rho\,h$$

vérifiée pour tout $h\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ et qui combinée à $(5.1.27)$ implique

$$g=\sqrt{(\mu_t(k)+\nu)}\,\partial_z\rho.$$

La convergence des normes $(5.1.26, c)$ conduit à

$$(5.1.29)\qquad \begin{cases}\lim\limits_{j\to\infty}\left(\sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\,\partial_z\rho_j\right)=\sqrt{(\mu_t(k)+\nu)}\,\partial_z\rho\\ \text{dans }\ L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)\ \text{ fort,}\end{cases}$$

(en fait dans $L^2([0,\mathcal{T}']\times\Omega)$ pour tout $\mathcal{T}'<\mathcal{T}$...). L'unicité de la limite implique que toute la suite converge. Le théorème de Lebesgue inverse implique que l'on peut extraire de la suite $(g_j)_{j>\nu}$ une sous-suite telle que

a) $(g_j)_{j>\nu}$ converge vers $\sqrt{(\mu_t(k)+\nu)}\,\partial_z\rho$ dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ p.p,

b) il existe $G\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ telle que

$$\forall\, j>\nu,\quad |g_j|\le G.$$

Posons à présent

$$h_j\overset{def}{=}\left(\sqrt{(\mu_t(k_j)+\nu)}\right)^{-1}.$$

c) D'après le point b) plus haut et la positivité de μ_t on a pour tout j

$$|g_j\,h_j|\le\frac{G}{\sqrt{\nu}}\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega).$$

d) Comme μ_t est continue et $(k_j)_{j>\nu}$ converge vers k p.p, il résulte du point a) plus haut

$$\lim_{j\to\infty}(g_j\,h_j)=\partial_z\rho\quad\text{p.p dans }\ [0,\mathcal{T}]\times\Omega.$$

Les points c) et d) précèdants combinés au fait que $g_j\,h_j=\partial_z\rho_j$ et au théorème de Lebesgue impliquent que $(\partial_z\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers $\partial_z\rho$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort. L'unicité de la limite implique que toute la suite converge. Cette convergence et la convergence forte de $(\nabla\rho_j)_{j>\nu}$ vers $\nabla\rho$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$, celle de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort impliquent la convergence forte de $(\rho_j)_{j>\nu}$ vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$. $\diamondsuit$

On est en mesure maintenant de terminer la démonstration du théorème 5.1.1. Pour cela, il ne nous reste plus qu'à passer à la limite dans l'équation pour k. Ce point suit le programme de la section 4.2.5 à l'exception des termes $\mu_t(k_j)\,\partial_z\rho_j$ et $\nu_v^t(k_j)\,|\nabla\rho_j|^2$ qui constituent la seule différence par rapport à ce qui est fait dans la section 4.2.5 du chapitre 4.

Soit $\varphi\in\mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. On sait que

— μ_t est bornée et continue,
— $(k_j)_{j>\nu}$ converge vers k p.p.

Donc, la suite $(\mu_t(k_j)\,\varphi)_{j>\nu}$ converge vers $\mu_t(k)\,\varphi$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort. Comme $(\partial_z\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers $\partial_z\rho$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \mu_t(k_j)\,\partial_z\rho_j\,\varphi = \int_0^t\int_\Omega \mu_t(k)\,\partial_z\rho\,\varphi.$$

Enfin, puisque $(\nabla\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers $\nabla\rho$ dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^2$ fort on peut de cette suite extraire une sous-suite telle que

— $(\nabla\rho_j)_{j>\nu}$ converge vers $\nabla\rho$ p.p,
— il existe $G\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ telle que pour tout j, $|\nabla\rho_j|\le G$.

Comme ν_v^t est bornée continue et que φ est bornée

— $(\nu_v^t(k_j)\,|\nabla\rho_j|^2\,\varphi)_{j>\nu}$ converge vers $\nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2\,\varphi$ p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$,
— pour tout j

$$|\nu_v^t(k_j)\,|\nabla\rho_j|^2\,\varphi| \le ||\varphi||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}||\nu_v^t||_{L^\infty(I\!R)}\,G^2\in L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega).$$

Il résulte du théorème de Lebesgue que pour tout $t\in[0,\mathcal{T}]$

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \nu_v^t(k_j)\,|\nabla\rho_j|^2\,\varphi = \int_0^t\int_\Omega \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2\,\varphi,$$

ce qui achève cette démonstration. En ce qui concerne la question des données initiales, on raisonne comme dans la preuve du lemme 4.2.5 dans la §4.2 du chapitre 4. Le cas non homogène se traite exactement de la même manière. $\diamondsuit$

En résumé, on a fait les hypothèses suivantes dans ce paragraphe :

(H.5.1) $(\rho^0,k_0)\in L^2(\Omega)\times L^1(\Omega)$, $k_0\ge 0$ p.p dans Ω,

(H.5.2) F est une fonction continue de ρ et il existe une constante C telle que

$$\forall\,\rho\in I\!R,\quad |F(\rho)|\le C(1+|\rho|),$$

(H.5.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont continues, ν_v^t et μ_t sont positives, ν_t est minorée par $\nu>0$ et il existe une constante C telle que

$$\forall\,k\in I\!R,\quad \nu_v^t(k)\le C(1+\mu_t(k)),$$

$\mu_t(0)=\nu_v^t(0)=0$,

(H.5.4) $\vec{\mathrm{v}}=0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists\,C\in I\!R^+,\ \ \exists\,\theta\in[0,2/3[,\ \ \forall\,k\in I\!R,\quad \nu_t(k)\le C(1+|\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\overrightarrow{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée dérivable de dérivée bornée,

(H.5.5) μ_t est bornée.

On a montré que le système

$$(M3) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t \rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ (b) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho\,|^2 - k\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\,\partial_z\rho, \end{cases} \\ (c) & \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \\ (d) & k|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{\,\Gamma_s} = m_b\,|\overrightarrow{\mathrm{v}}\,|, \\ (e) & (\rho,k)|_{t=0} = (\rho^0, k_0), \end{cases}$$

possède une solution (ρ, k) au sens des distributions avec $k \geq 0$ p.p dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$ telle que

$$\begin{cases} (\rho,k) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times \displaystyle\bigcap_{1\leq p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega)), \\ (\partial_t\rho, \partial_t k) \in L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))') \times L^1([0,\mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega)). \end{cases}$$

En fait, l'équation pour ρ est plus régulière. On a

$$\begin{cases} \quad \forall\,\hat\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \quad \forall\, t \in [0,\mathcal{T}], \\ \displaystyle\int_0^t <\partial_t\rho, \hat\rho> + \mathcal{K}_h \int_0^t\int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat\rho \,+\, \alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho\,\hat\rho + \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho\,\partial_z\hat\rho = \int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\hat\rho, \end{cases}$$

tandis que

$$\begin{cases} \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}([0,\mathcal{T}]\times\Omega), \\ \displaystyle -\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\,\partial_t\varphi + \lambda\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla k.\nabla\varphi + \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nu_t(k)\,\partial_z k\,\partial_z\varphi = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2\varphi + \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \mu_t(k)\,\partial_z\rho\,\varphi - \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega k\sqrt{k}\,\varphi. \end{cases}$$

Dans ce résultat l'hypothèse μ_t bornée joue un rôle dans toutes les étapes de la démonstration qui est basée sur une égalité d'énergie. Cette méthode ne peut plus s'appliquer lorsque l'on ne suppose pas μ_t bornée car on ne peut plus prendre ρ comme fonction test dans l'équation limite. Mieux encore, sans aucune hypothèse de croissance sur μ_t on ne peut pas espérer construire de solution au sens des distributions au système $(M3)$ car les termes de diffusion dans l'équation pour ρ n'ont alors plus de sens et il faudrait utiliser des espaces de Sobolev à poid pour les définir. C'est pourquoi, on utilise la notion de solution renormalisée pour l'étude du cas μ_t non bornée et sans hypothèse de croissance.

REMARQUE 5.1.1 — On obtient un résultat analogue dans le cas stationnaire pour lequel les raisonnements sont les mêmes et plus simples. ♢

REMARQUE 5.1.2 — En se servant des résultats du §4.5 il est possible de généraliser le théorème 5.1.1 au cas du système $(M8)$. ♢

5. 2 — NOTION DE SOLUTION RENORMALISÉE

5.2.1 — ORIENTATION

Afin d'isoler le problème dû aux termes de diffusion et à la perte de l'égalité d'énergie on considère le système stationnaire très simplifié

$$(5.0.1) \qquad \begin{cases} (a) \quad - div_c(\nu_t(k)\, \nabla_c \rho) = f, \\ (b) \quad - div_c(\nu_t(k)\, \nabla_c k) = \nu_t(k)\, |\nabla_c \rho|^2, \\ (c) \quad \quad k|_{\,\partial\Omega} = \rho|_{\,\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Les hypothèses sont :

(H.5.6) ν_t est continue et minorée par $\nu > 0$, *i.e.* $\forall\, k \in I\!R$, $\nu_t(k) \geq \nu$,

(H.5.7) $f \in L^2(\Omega)$.

Sans hypothèse de croissance sur ν_t les difficultés dans ce système sont les suivantes.

- Les termes $-div_c(\nu_t(k)\, \nabla_c \rho)$ et $-div_c(\nu_t(k)\, \nabla_c k)$ n'ont aucune raison d'être dans des espaces de distributions lorsque ρ et k sont dans des espaces de Sobolev,
- partant de solutions approchées, on ne peut pas utiliser une égalité d'énergie à la limite pour montrer la convergence des énergies et passer à la limite dans l'équation pour k.

On commence par une remarque formelle.

REMARQUE 5.2.1 — En prenant ρ comme fonction test dans $(5.0.1, a)$ et en intégrant par parties on obtient

$$\sqrt{\nu} \left(\int_\Omega |\nabla_c \rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \nu_t(k)\, |\nabla_c \rho|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}}\, ||f||_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit en prenant $\beta_j(k)$ comme fonction test dans $(5.0.1, a)$ et en intégrant par parties

$$\nu \int_\Omega |\nabla_c \beta_j(k)|^2 \leq \int_\Omega \nu_t(k)\, |\nabla_c \beta_j(k)|^2 \leq j\, \frac{C^2}{\nu}\, ||f||^2_{L^2(\Omega)}.$$ ♢

Donc, uniquement avec les hypothèses (H.5.6) et (H.5.7) on a des estimations sur ce système *i.e.*

$$\rho \in H^1_0(\Omega), \quad \forall\, j \in \mathbb{R}^+, \quad \beta_j(k) \in H^1_0(\Omega).$$

L'équation pour k est une équation avec un second membre dans $L^1(\Omega)$. En reprenant la version stationnaire de BOCCARDO-GALLOUËT [1] (*cf.* §4.2, chapitre 4) on a

$$\forall\, p \in [1, 3/2[, \quad k \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Ceci montre qu'en partant d'une suite de solutions approchée et en régularisant ν_t par troncature on peut extraire des sous-suites convergentes. Tout le problème consiste à savoir quelle équation est vérifiée par la limite. En d'autres termes, on se pose les questions suivantes.

- 1) Y a-t il un sens à donner au système $(5.0.1)$ et si oui lequel ? Réponse : oui, la notion de solution renormalisée (section 5.2.2).
- 2) Ce sens coïncide-t-il avec le sens des distributions lorsque ν_t est bornée ? Réponse : oui (section 5.2.2).
- 3) A t-on un résultat d'existence à ce système dans ce sens avec juste les hypothèses (H.5.6) et (H.5.7) ? Réponse : oui (§5.3).

Dans ce paragraphe on définit la notion de solution renormalisée pour ce système et on montre la consistance de la définition. La démonstration du résultat d'existence fait l'objet du paragraphe suivant.

5.2.2 — DÉFINITION D'UNE SOLUTION RENORMALISÉE

Le principe de la définition consiste à “couper" les grandes valeurs de k dans les équations. On remarque que lorsque k est mesurable et égale à ∞ uniquement sur un ensemble de mesure nulle dans Ω on a formellement

$$\begin{cases} \forall\, h \in C^\infty_c(\mathbb{R}), \\ -div_c(h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k) + h'(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2 = -\,h(k)\,div_c(\nu_t(k)\nabla_c k). \end{cases}$$

Dans toute la suite on suppose vérifiées les hypothèses (H.5.6) (continuité de $\nu_t \geq \nu > 0$) et (H.5.7) ($f \in L^2(\Omega)$).

DÉFINITION 5.2.1 — *On dit qu'un couple* (ρ, k) *de fonctions mesurables sur* Ω *est une solution renormalisée du système* $(5.0.1)$ *si et seulement si*

(5.2.1) $\rho \in H^1_0(\Omega)$,

(5.2.2) $\forall\, j \in \mathbb{R}^\star_+, \quad \beta_j(k) \in H^1_0(\Omega)$,

(5.2.3) $\sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla\rho \in [L^2(\Omega)]^2$,

(5.2.4) $k \in \bigcap\limits_{1 \leq p < 3/2} W^{1,p}_0(\Omega)$,

$$(5.2.5) \quad \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q}\left(\int_{\{q\leq |\,k\,|\leq 2\,q\}} \nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2\right) = 0,$$

$$(5.2.6)\begin{cases} \quad \forall\, h \in C_c^\infty(I\!R), \\ (a) \quad \begin{cases} -div_c(h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho) + h'(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k\,.\nabla_c\rho = f\,h(k) \\ \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \\ (b) \quad \begin{cases} -div_c(h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k) + h'(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2 = \\ \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,h(k) \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \end{cases}$$

Les points (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3) et (5.2.4) sont motivés par la remarque 5.2.1 plus haut. Le point (5.2.5) provient du problème de la consistance de cette définition qui fait l'objet de la section suivante. Enfin, (5.2.6) est le résultat de la multiplication du système par $h(k)$. $\diamondsuit$

On montre dans le lemme 5.2.1 en quoi tous les termes dans les équations (5.2.6) ont un sens dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

LEMME 5.2.1 — *Soit k une fonction mesurable telle que*

$$\forall\, j \in I\!R^+, \quad \beta_j(k) \in H_0^1(\Omega), \quad k \in \bigcap_{1\leq p<3/2} W_0^{1,p}(\Omega)$$

(cf. (5.2.2) *et* (5.2.4)*). On suppose que ν_t vérifie (H.5.6). Alors,*

$$\forall\, h \in C_c^\infty(I\!R), \quad h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k \in L^2(\Omega) \quad \textit{et} \quad h'(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2 \in L^1(\Omega).$$

De plus

$$\forall\, \rho \in H_0^1(\Omega), \quad h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho \in L^2(\Omega), \quad h'(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k\,.\nabla_c\rho \in L^1(\Omega). \quad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — Soient k mesurable sur Ω vérifiant (5.2.2) et (5.2.4), $h \in C_c^\infty(I\!R)$ de support inclus dans un intervalle $[m, M]$. On pose $j = sup(|m|, |M|)$. Alors, $\forall\, \ell \notin [-j, j]$, $h(\ell) = 0$ ce qui entraîne

$$h(k)\,\nu_t(k) \in L^\infty(\Omega), \quad h'(k)\,\nu_t(k) \in L^\infty(\Omega).$$

On a directement pour $\rho \in H_0^1(\Omega)$, $h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho \in L^2(\Omega)$. Par ailleurs, puisque $k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour un $p > 1$,

$$h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k = h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\beta_j(k)$$

(*cf.* MURAT [1]). Comme $\nabla_c \beta_j(k) \in L^2(\Omega)$, $h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k \in L^2(\Omega)$. Les autres termes se traitent à l'aide du même argument. $\diamondsuit$

REMARQUE 5.2.1 — On peut donner une définition du même ordre pour le problème parabolique correspondant à $(5.0.1)$. Dans le cas d'une seule équation, l'existence d'une solution renormalisée est connue (*cf.* BLANCHARD [1]). Le problème d'existence est ouvert pour le système d'évolution avec deux équations. $\diamondsuit$

5.2.3 — CONSISTANCE DE LA DÉFINITION

Lorsque ν_t est bornée on montre en raisonnant comme dans le §5.1 que le système $(5.0.1)$ possède une solution au sens des distributions. Il se pose le problème de savoir si dans ce cas la notion de solution renormalisée coïncide avec la notion de solution au sens des distributions.

PROPOSITION 5.2.1 — *On suppose réalisées les hypothèses* (H.5.6) *($\nu_t > \nu$ et ν_t est continue) et* (H.5.7) *($f \in L^2(\Omega)$). On suppose de plus que ν_t est bornée. Soit*

$$(\rho, k) \in H_0^1(\Omega) \times \bigcap_{p<3/2} W_0^{1,p}(\Omega).$$

Alors, (ρ, k) est une solution renormalisée de $(5.0.1)$ *si et seulement si (ρ, k) est une solution au sens des distributions de* $(5.0.1)$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — Soit (ρ, k) une solution renormalisée de l'équation $(5.0.1)$. Étant donné $n \in I\!N$ on considère la fonction h_n telle que

— paire et égale à 1 sur $[0, n]$,
— égale à 0 sur $[2\,n, +\infty[$,
— affine sur $[n, 2\,n]$.

En particulier, $h_n' = -(1/n)$ sur l'intervalle $]n, 2\,n[$. Pour $\varepsilon > 0$, on considère une fonction paire $h_n^\varepsilon \in C_c^\infty(I\!R)$ telle que

$$h_n^\varepsilon = h_n \quad \text{sur} \quad [0, n-\varepsilon] \cup [n+\varepsilon, 2\,n-\varepsilon] \cup [2\,n+\varepsilon, \infty[.$$

La suite h_n^ε est une approximation uniforme de classe C^∞ de la fonction h_n. Soit enfin $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Comme (ρ, k) est une solution renormalisée du système $(5.0.1)$

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h_n^\varepsilon(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho.\nabla_c\varphi + \int_\Omega (h_n^\varepsilon)'(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k\,.\nabla_c\rho\,\varphi = \\ \displaystyle\int_\Omega f\,h_n^\varepsilon(k)\,\varphi, \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h_n^\varepsilon(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k.\nabla_c\varphi + \int_\Omega (h_n^\varepsilon)'(k)\,\nu_t(k)\;|\nabla_c k|^2\,\varphi = \\ \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,h_n^\varepsilon(k)\,\varphi. \end{cases} \end{cases}$$

En faisant tendre ε vers 0 on a

$$(5.2.7)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h_n(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho.\nabla_c\varphi - \\ \displaystyle\frac{1}{n}\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\nabla_c k\,.\nabla_c\rho\,\varphi = \int_\Omega f\,h_n(k)\,\varphi, \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega h_n(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k.\nabla_c\varphi - \\ \displaystyle\frac{1}{n}\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\,|\nabla_c k|^2\,\varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,h_n(k)\,\varphi. \end{cases} \end{cases}$$

On fait maintenant tendre n vers l'infini dans $(5.2.7)$ en rappelant que ν_t est bornée. Puisque h_n tend vers 1 uniformément sur les compacts de $I\!R$, on a grâce à $(5.2.1)$ et $(5.2.4)$ et le fait que ν_t soit bornée

$$(5.2.8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho.\nabla_c\varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\,\nabla_c\rho.\nabla_c\varphi, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k.\nabla_c\varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\,\nabla_c k.\nabla_c\varphi, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\,h_n(k)\,\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,h_n(k)\,\varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,\varphi \end{cases}$$

Par ailleurs, comme

$$\frac{1}{n}\left|\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\,|\nabla_c k|^2\,\varphi\right| \le \frac{||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}}{n}\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\,|\nabla_c k|^2,$$

on déduit de $(5.2.5)$ $(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\int_{\{n\le|\,k\,|\le 2\,n\}}\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2\right) = 0:$ c'est là que cela sert) que

$$(5.2.9)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\,|\nabla_c k|^2\,\varphi = 0.$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de Young on a

$$|\nu_t(k)\nabla_c k.\nabla\rho\,\varphi| \le \frac{||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}}{2}(\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2 + \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2).$$

Il résulte alors de $(5.2.3)$ ($\sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla\rho \in L^2(\Omega)$) et $(5.2.5)$

$$(5.2.10)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\{n\le|k|\le 2n\}} \nu_t(k)\,\,\nabla_c k.\nabla_c\rho\,\varphi = 0.$$

En combinant $(5.2.7, 8, 9, 10)$ on obtient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nu_t(k)\,\nabla_c\rho.\nabla_c\varphi = \int_\Omega f\,\varphi, \\ \displaystyle\int_\Omega \nu_t(k)\,\nabla_c k.\nabla_c\varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,\varphi \end{cases}$$

vérifiées pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui établit que (ρ, k) est une solution du système $(5.0.1)$ au sens des distributions.

La réciproque se déduit de la multiplication de $(5.0.1)$ par $h(k)$ et de la remarque 5.2.1. L'assertion $(5.2.5)$ s'obtient en multipliant l'équation pour k par $f_q(k)$ où f_q et représentée sur la figure 5.3.1 plus loin. Les détails de cette procédure sont écrits dans la section 5.3.5 à propos de la démonstration du résultat d'existence. $\diamondsuit$

Il ne reste plus qu'à montrer l'existence d'une solution renormalisée au système $(5.0.1)$ et ce, sans supposer ν_t bornée et sans aucune hypothèse de croissance.

5. 3 — EXISTENCE D'UNE SOLUTION RENORMALISÉE DANS LE CAS STATIONNAIRE ; VISCOSITÉS NON BORNÉES

5.3.1 — RÉSULTAT ET PLAN DE LA DÉMONSTRATION

Ce paragraphe a pour but la démonstration d'un résultat d'existence d'une solution renormalisée au système $(5.0.1)$. L'unicité est un problème ouvert.

THÉORÈME 5.3.1 — *On suppose que*

(H.5.6) ν_t *est continue et minorée par* $\nu > 0$, *i.e.* $\forall\, k \in I\!R$, $\nu_t(k) \geq \nu$,

(H.5.7) $f \in L^2(\Omega)$.

Alors le système

$$(5.0.1) \qquad \begin{cases} (a) \quad -\,div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c\rho) = f, \\ (b) \quad -\,div_c(\nu_t(k)\,\nabla_c k) = \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2, \\ (c) \qquad k|_{\partial\Omega} = \rho|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

possède une solution renormalisée $(\rho, k) \in H_0^1(\Omega) \times \bigcap_{p<3/2} W_0^{1,p}(\Omega)$. $\diamondsuit$

La clef de ce résultat est la convergence des énergies pour ρ à partir d'approximations. On ne peut plus raisonner ici directement à l'aide de l'égalité d'énergie. On montre en fait que ce sont les troncatures de la limite qui vérifient une égalité d'énergie (*cf.* $(5.3.16)$), ce qui implique finalement l'égalité d'énergie pour la limite elle même.

La démonstration suit le shéma habituel où la solution est obtenue comme limite d'une suite de solutions approchées introduites maintenant.

Pour $n \in I\!N$, $n \geq \nu$, on considère ν_t^n définie par

$$\nu_t^n(k) \stackrel{def}{=} \beta_n(\nu_t(k)). \tag{5.3.1}$$

On note que la suite $(\nu_t^n)_{n\geq\nu}$ converge uniformément sur les compacts de $I\!R$ vers ν_t lorsque $n \to +\infty$ et satisfait pour tout entier $n \geq \nu$

$$0 < \nu \leq \nu_t^n \leq n. \tag{5.3.2}$$

Étant donné un entier $n \geq \nu$ soit (ρ_n, k_n) tel que

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \rho_n \in H_0^1(\Omega), \\ -div_c(\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\rho_n) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} k_n \in \displaystyle\bigcap_{p<3/2} W_0^{1,p}(\Omega), \\ -div_c(\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n) = \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \end{cases} \tag{5.3.3}$$

L'existence de (ρ_n, k_n) est d'ores et déjà acquise par le même raisonnement que dans le paragraphe précédent adapté au cas stationnaire car ν_t^n est bornée.

La démonstration du théorème 5.3.1 consiste à montrer que $(\rho_n, k_n)_{n>\nu}$ converge vers une solution renormalisée de $(5.0.1)$ et sera complète d'ici la fin de ce paragraphe. Elle est découpée en cinq étapes constituées par des lemmes et des sections intermédiaires.

Étape 1) Estimations a priori et extraction d'une sous-suite convergente vers une limite (ρ, k).

Étape 2) Convergence des énergies

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2 = \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2. \tag{5.3.4}$$

Étape 3) Convergence forte dans $L^1([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ de $(\nu_t^n(k_n)|\nabla_c\rho_n|^2)_{n>\nu}$ vers $\nu_t(k)|\nabla_c\rho|^2$.

Étape 4) Convergence forte dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\Omega))$ pour j fixé de $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ vers $\beta_j(k)$,

Étape 5) Vérification point par point que (ρ, k) est une solution renormalisée de $(5.0.1)$. $\diamondsuit$

Les étapes 3 et 4 sont une conséquence de l'étape 2. Ces résultats additionnels de convergence sont nécessaires au passage à la limite dans les équations, en particulier dans les termes

$$h'(k_n)\nu_t^n(k_n)\nabla_c k_n.\nabla\rho_n, \quad h'(k_n)\nu_t^n(k_n)|\nabla_c k_n|^2.$$

5.3.2 — ESTIMATIONS À PRIORI ET EXTRACTION DE SOUS-SUITES

Cette section constitue l'étape 1) du programme précédent.

LEMME 5.3.1 — *La suite* $(\rho_n, k_n)_{n>\nu}$ *est bornée dans*

$$H_0^1(\Omega) \times \bigcap_{p<3/2} W_0^{1,p}(\Omega)$$

et pour tout $j \in I\!R_\star^+$, $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$. ♢

DÉMONSTRATION — On commence par estimer $(\rho_n)_{n>\nu}$ puis $(k_n)_{n>\nu}$.

Estimation de $(\rho_n)_{n>\nu}$. On choisit ρ_n comme fonction test dans $(5.3.3, a)$. En intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis l'inégalité de Poincaré, on déduit d'après (5.3.2) et (H.5.7)

$$\left(\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c \rho_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{\nu}}\,||f||_{L^2(\Omega)} \tag{5.3.5}$$

où C désigne la constante de Poincaré. On en déduit en particulier

— $(\rho_n)_{n>\nu}$ *est bornée dans* $H_0^1(\Omega)$,
— $(\nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2)_{n>\nu}$ *est bornée dans* $L^1(\Omega)$.

Estimation de $(k_n)_{n>\nu}$. Soit un entier $j \geq 1$. On choisit en premier lieu $\beta_j(k_n)$ comme fonction test dans $(5.3.3, b)$ et on intègre par parties en utilisant (5.3.2) et (5.3.5). Il vient

$$\nu \int_\Omega |\nabla_c \beta_j(k_n)|^2 \leq \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c \beta_j(k_n)|^2 \leq j\,\frac{C^2}{\nu}\,||f||^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.3.6}$$

Par ailleurs, comme $(\nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2)_{n>\nu}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, les résultats dans BOCCARDO-GALLOUËT [1] (*cf.* aussi le §4.2) montrent que pour tout $p \in [1, 3/2[$ (on raisonne ici en dimension 3) il existe une constante A_p qui ne dépend que de p et de Ω et telle que

$$||k_n||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq A_p \tag{5.3.7}$$

ce qui montre le lemme. ♢

On note que pour tout $q \in I\!R_+^\star$

$$\int_{\{q\leq |k_n|\leq 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 \leq \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c \beta_{2q}(k_n)|^2$$

de sorte que (5.3.6) implique que

$$\int_{\{q\leq |k_n|\leq 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 \leq 2\,q\,\frac{C^2\,||f||^2_{L^2(\Omega)}}{\nu}. \tag{5.3.8}$$

COROLLAIRE 5.3.1 — *Soit* $p \in]1, 3/2[$. *De* $(\rho_n, k_n)_{n>\nu}$ *on peut extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) qui converge vers un couple* (ρ, k) *dans*

$H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ *faible,*
$L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$ *fort pour tout* $(r,s) \in [1,6[\times[1,p^\star[$,
Ω *presque partout.*

En fait $k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $p < 3/2$. $\diamondsuit$

5.3.3 — CONVERGENCE DES ÉNERGIES

Cette section constitue l'étape 2) du programme et est la partie cruciale de la démonstration du théorème 5.3.1. On note (ρ, k) le couple introduit dans le corollaire 5.3.1 plus haut (*i.e.* la limite de $(\rho_n, k_n)_{n>\nu}$).

LEMME 5.3.2 — *On a la convergence des énergies*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c \rho_n|^2 = \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2. \tag{5.3.4}$$ $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On démontre ce résultat en quatre temps par un double passage à la limite.

i) ÃĐEstimation pour q fixé du terme (pour h_q, *cf.* fig. 5.2.1)

$$h_q'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla k_n.\nabla \rho_n.$$

ii) On fait tendre n vers l'infini pour q fixé.
iii) On fait tendre q vers l'infini pour montrer l'égalité d'énergie satisfaite par les troncatures (*cf.* (5.3.16)).
iv) On en déduit (5.3.4).

i) *Terme* $h_q'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla k_n.\nabla\rho_n$. Soient q et n fixés dans $I\!N$. Multiplions $(5.3.3, a)$ par $h_q(k_n)$ (*cf.* fig. 5.2.1). Il vient

$$\begin{cases} -div(h_q(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\rho_n) + h_q'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n\,.\nabla_c\rho_n = \\ \quad f\,h_q(k_n) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{5.3.9}$$

Soit $m_{n,q} \in (L^\infty(\Omega))'$ définie par

$$m_{n,q} \overset{def}{=} h_q'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n.\nabla_c\rho_n.$$

Chaque $m_{n,q} \in L^1(\Omega)$ et

— l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
— (5.3.5) et (5.3.8),
— h_q' admet $[q, 2q]$ comme support sur $I\!R_+$ et $|h_q'| \le (1/q)$,

entraînent

$$\begin{cases} ||m_{n,q}||_{(L^\infty(\Omega))'} \le ||m_{n,q}||_{L^1(\Omega)} \le \\ \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_{\{q\le k_n\le 2q\}} \sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,|\nabla_c k_n|\,\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,|\nabla_c\rho_n| \le \dfrac{C^2\,||f||^2_{L^2(\Omega)}}{\nu\,\sqrt{q}}. \end{cases} \tag{5.3.10}$$

Lorsque q est fixé, on peut extraire de la suite $(m_{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers un certain m_q dans $(L^\infty(\Omega))'$ faible étoile vérifiant d'après $(5.3.10)$

$$(5.3.11) \qquad ||m_q||_{(L^\infty(\Omega))'} = O\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

En particulier, $(5.3.11)$ implique que la suite $(m_q)_{q\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $(L^\infty(\Omega))'$ fort.

ii) *Passage à la limite dans* $(5.3.9)$ *lorsque* n *tend vers l'infini à* q *fixé*. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$(5.3.12) \qquad \lim_{n\to\infty} < m_{n,q}, \varphi > = < m_q, \varphi >$$

et comme

— $(k_n)_{n>\nu}$ converge vers k p.p,
— les fonctions h_q et ν_t sont continues par rapport à k (*cf.* (H.5.6) et fig. 5.2.1)),
— $(\nu_t^n)_{n>\nu}$ converge vers ν_t uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$ (*cf.* $(5.3.1)$,

la suite $(h_q(k_n)\nu_t^n(k_n)\,\nabla\varphi)_{n\geq\nu}$ converge vers $h_q(k)\nu_t(k)\,\nabla\varphi$ p.p dans Ω lorsque n tend vers l'infini. Finalement, puisque h_q est nulle lorsque $|k| \geq 2q$ et plus petite que 1 et que $(\nu_t^n)_{n>\nu}$ est uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{R}$, il existe une constante C_{2q} telle que

$$|h_q(k_n)\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\varphi| \leq C_{2q}|\nabla_c\varphi| \in L^\infty(\Omega).$$

En particulier, $(h_q(k_n)\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\varphi)_{n\geq\nu}$ converge vers $h_q(k)\nu_t(k)\,\nabla_c\varphi$ dans $L^2(\Omega)$ fort. De la convergence faible de $(\rho_n)_{n\geq\nu}$ vers ρ on déduit

$$(5.3.13) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_q(k_n)\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\varphi\,.\nabla_c\rho_n = \int_\Omega h_q(k)\nu_t(k)\,\nabla_c\varphi\,.\nabla_c\rho.$$

En combinant $(5.3.9)$, $(5.3.12)$ et $(5.3.13)$ on a

$$(5.3.14) \qquad -div(\nu_t(k)\,h_q(k)\,\nabla_c\rho) + m_q = f\,h_q(k) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

iii) *Passage à la limite dans* $(5.3.14)$ *pour des énergies tronquées*. Soit $j \geq 1$ un entier fixé. On choisit $\beta_j(\rho) \in L^\infty(\Omega)$ comme fonction test dans $(5.3.14)$ et on intègre par parties

$$(5.3.15) \qquad \int_\Omega h_q(k)\nu_t(k)\,|\nabla_c\beta_j(\rho)|^2 + < m_q, \beta_j(\rho) > = \int_\Omega f\,h_q(k)\,\beta_j(\rho).$$

Comme $(h_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$, en faisant tendre q vers l'infini dans $(5.3.15)$ combiné à $(5.3.11)$ (convergence de $(m_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vers 0) et $\beta_j(\rho) \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\beta_j(\rho)|^2 = \int_\Omega f\,\beta_j(\rho) \tag{5.3.16}$$

vérifiée pour tout $j > 0$.

iv) *Obtention de* $(5.3.4)$. La suite $(\beta_j(\rho))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ p.p dans Ω et

$$|\beta_j(\rho)\,f| \le |\rho\,f| \in L^1(\Omega).$$

De plus $(\nabla_c\beta_j(\rho))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $\nabla_c\rho$ p.p dans Ω et on a

$$\nu_t(k)\,|\nabla_c\beta_j(\rho)|^2 \le \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2.$$

On admet provisoirement que

$$\nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2 \in L^1(\Omega)$$

ce qui fait l'objet du lemme 5.3.3 plus loin. En faisant tendre j vers l'infini dans $(5.3.16)$ et en appliquant le théorème de Lebesgue

$$\int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2 = \int_\Omega f\,\rho = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\,\rho_n = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2,$$

prouvant ainsi $(5.3.4)$. ♢

LEMME 5.3.3 — $\nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2 \in L^1(\Omega)$. ♢

DÉMONSTRATION — Pour q fixé on déduit de $(5.3.5)$ et de $h_q \in [0,1]$ que

$$u_{n,q} \stackrel{def}{=} \sqrt{h_q(k_n)\,\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\rho_n$$

est une suite bornée dans $[L^2(\Omega)]^3$. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $[L^2(\Omega)]^3$ vers un certain $u_q \in [L^2(\Omega)]^3$ lorsque n tend vers l'infini et q est fixé. Or,

— h_q et ν_t sont continues, $(\nu_t^n)_{n>\nu}$ converge vers ν_t uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$,

— $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers k p.p dans Ω, doncÃĐ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{h_q(k_n)\,\nu_t^n(k_n)} = \sqrt{h_q(k)\,\nu_t(k)} \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

Enfin, comme

— $(\nabla_c \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\nabla_c \rho$ dans $[L^2(\Omega)]^3$ faible,

— $\sqrt{h_q(k_n)\,\nu_t^n(k_n)}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ car h_q est à support compact et $(\nu_t^n)_{n>\nu}$ est uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{R}$,

on déduit

$$u_q = \sqrt{h_q(k)\,\nu_t(k)}\,\nabla_c \rho.$$

Par passage à la limite faible dans (3.5.5) on a ($h_q \in [0,1]$)

$$\begin{cases} 0 \le \displaystyle\int_\Omega h_q(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2 \le \liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega h_q(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,|\nabla \rho_n|^2 \right) \le \\ \displaystyle\liminf_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla \rho_n|^2 \right) \le \frac{C^2}{\nu}\,||f||^2_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Comme k est intégrable et ν_t bornée sur les compacts de $\mathbb{R}$, $\nu_t(k)$ est finie p.p et il en est de même pour $|\nabla_c \rho|^2$. Par conséquent, puisque h_q converge vers 1 uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$

$$\lim_{q\to\infty} h_q(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2 = \nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2 \quad \text{p.p dans } \Omega.$$

Toutes fonctions considérées étant positives, il résulte du lemme de Fatou et des inégalités précédentes

$$0 \le \int_\Omega \nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2 \le \frac{C^2}{\nu}\,||f||^2_{L^2(\Omega)}$$

ce qui montre que $\nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2 \in L^1(\Omega)$. ♢

5.3.4 — PROPRIÉTÉS ADDITIONNELLES DE CONVERGENCE

On traite dans cette section les étapes 3) et 4) du plan de la démonstration du théorème 5.3.1.

LEMME 5.3.4 — *La suite* $(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c \rho_n)_{n>\nu}$ *converge fortement dans* $[L^2(\Omega)]^3$ *vers* $\sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c \rho$. ♢

DÉMONSTRATION — On montre que la suite $(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c \rho_n)_{n>\nu}$ converge vers $\sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c \rho$ dans $[L^2(\Omega)]^3$ faible puis on conclut grâce à la convergence des énergies (5.3.4).

On pose

$$w_n \stackrel{def}{=} \sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c \rho_n \tag{5.3.17}$$

D'après (5.3.5) $(w_n)_{n>\nu}$ est bornée dans $[L^2(\Omega)]^3$. On peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $[L^2(\Omega)]^3$ vers une fonction notée w. On introduit

$$z_n \stackrel{def}{=} \left(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\right)^{-1}. \tag{5.3.18}$$

Comme $\nu_t^n \geq \nu$ (*cf.* (5.3.1) et (5.3.2)), pour tout $n > \nu$

$$0 \leq z_n \leq \nu^{-(1/2)} \quad \textit{i.e.}$$

(5.3.19) *La suite* $(z_n)_{n>\nu}$ *est bornée dans* $L^\infty(\Omega)$.

Comme $(k_n)_{n\in \mathbb{N}}$ converge vers k p.p dans Ω et que ν_t^n converge vers ν_t uniformément vers ν_t sur les compacts de $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\sqrt{\nu_t(k)}\right)^{-1} \stackrel{def}{=} z \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{5.3.20}$$

En particulier d'après (5.3.19), (5.3.20) et le théorème de Lebesgue

(5.3.21) $\forall\, \varphi \in [L^2(\Omega)]^3,\ (z_n\varphi)_{n>\nu}$ *converge vers* $z\varphi$ *dans* $[L^2(\Omega)]^3$ *fort.*

Comme $(w_n)_{n>\nu}$ converge vers w dans $[L^2(\Omega)]^3$ faible

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega z_n\varphi.w_n = \int_\Omega z\varphi.w$$

c'est-à-dire que $(z_n w_n)_{n>\nu}$ converge vers zw dans $[L^2(\Omega)]^3$ faible. Mais comme $z_n w_n = \nabla\rho_n$ (*cf.* (5.3.17, 18)) et que $(\nabla\rho_n)_{n>\nu}$ converge faiblement vers $\nabla\rho$ dans $[L^2(\Omega)]^3$, $zw = \nabla\rho$, soit encore

$$w = \sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c\rho.$$

En combinant ce résultat à (5.3.4) (*i.e.* ici la convergence des normes), on en déduit que la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers w est forte dans $[L^2(\Omega)]^3$. Le même argument permet aussi de prouver que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. $\diamondsuit$

COROLLAIRE 5.3.2 — *La suite* $g_n \stackrel{def}{=} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2$ *est équiintégrable.* $\diamondsuit$

Le résultat suivant constitue l'étape 4) du programme. Un résultat analogue a été montré pour la première fois dans LIONS-MURAT [1].

LEMME 5.3.2 — *Soit* $j \in \mathbb{R}_+^\star$. *La suite* $\beta_j(k_n)$ *converge vers* $\beta_j(k)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *fort.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On commence au préalable par montrer que

$$\forall j \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \beta_j(k) \in H_0^1(\Omega).$$

Soit $j \in \mathbb{R}_+^\star$ fixé. L'estimation (5.3.6) implique que la suite $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. On peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction $g_j \in H_0^1(\Omega)$, la convergence étant également forte dans $L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, 6[$ et p.p dans Ω.

Comme $(k_n)_{n>\nu}$ converge vers k p.p dans Ω, la continuité de β_j implique que la suite $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ converge vers $\beta_j(k)$ p.p dans Ω (entre autre, toujours pour j fixé). Ceci montre que $g_j = \beta_j(k) \in H_0^1(\Omega)$ dans Ω p.p, ce qui assure que k vérifie le point (5.2.2) dans la définition 5.2.1 d'une solution renormalisée.

On pose

$$g_n \stackrel{def}{=} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c \rho_n|^2, \quad g \stackrel{def}{=} \nu_t(k)\,|\nabla_c \rho|^2.$$

D'après le lemme 5.3.4, $(g_n)_{n>\nu}$ converge vers g dans $L^1(\Omega)$ fort. De plus avec cette notation

$$-div_c(\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n) = g_n \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.3.22}$$

Soit $j \in I\!R_+^\star$ fixé. Ce qui précède assure que $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ converge vers $\beta_j(k)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible. Il faut montrer que la convergence et forte.

Soient n et q deux entiers donnés. Formons

$$\begin{cases} I_{n,q} \stackrel{def}{=} \displaystyle\int_\Omega \left|\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) \;-\; \sqrt{\nu_t^q(k_q)}\,\nabla_c\beta_j(k_q)\right|^2 = \\ \displaystyle\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\beta_j(k_n)|^2 + \int_\Omega \nu_t^q(k_q)\,|\nabla_c\beta_j(k_q)|^2 \;-\; 2\,J_{n,q} \end{cases} \tag{5.3.23}$$

où l'on a posé

$$J_{n,q} \stackrel{def}{=} \int_\Omega \sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\sqrt{\nu_t^q(k_q)}\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q). \tag{5.3.24}$$

Le but consiste à faire tendre d'abord q vers l'infini dans le second membre de $(5.2.23)$, puis ensuite n. La suite de la démonstration s'articule en trois temps.

i) On montre que pour n fixé

$$\lim_{q\to\infty} I_{n,q} = I_n$$

où

$$\begin{cases} I_n \stackrel{def}{=} \displaystyle\int_\Omega G_n\,\beta_j(k_n) + \int_\Omega g\,\beta_j(k) - 2\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) - \\ 2\displaystyle\int_\Omega \left(\sqrt{\nu_t^n(\beta_j(k_n))}\,\sqrt{\nu_t(\beta_j(k))} - \nu_t^n(\beta_j(k_n))\right)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k). \end{cases}$$

ii) On montre l'inégalité de norme

$$\int_\Omega \left|\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) \;-\; \sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c\beta_j(k)\right|^2 \le I_n.$$

iii) On montre que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

i) *Limite de $I_{n,q}$ à n fixé.* On passe à la limite dans les termes de $I_{n,q}$ les uns après les autres.

Terme $\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\beta_j(k_n)|^2 + \int_\Omega \nu_t^q(k_q)\,|\nabla_c\beta_j(k_q)|^2$. On déduit de l'équation (5.3.22)

$$\text{(5.3.25)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\beta_j(k_n)|^2 = \int_\Omega g_n\,\beta_j(k_n), \\ \displaystyle\int_\Omega \nu_t^q(k_q)\,|\nabla_c\beta_j(k_q)|^2 = \int_\Omega g_q\,\beta_j(k_q). \end{cases}$$

Comme $(g_q)_{q>\nu}$ converge vers f dans $L^1(\Omega)$ fort (*cf.* lemme 5.3.4), d'après le théorème de Lebesgue inverse on sait qu'il existe $G \in L^1(\Omega)$ telle que de la suite $(g_q)_{q>\nu}$ on puisse extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) convergente vers g p.p avec $|g_q| \leq G$. Ainsi

$$|g_q\,\beta_j(k_q)| \leq j\,G.$$

Puisque $(g_q\,\beta_j(k_q))_{q>\nu}$ converge vers $g\,\beta_j(k)$ p.p, $(g_q\,\beta_j(k_q))_{q>\nu}$ converge vers $g\,\beta_j(k)$ dans $L^1(\Omega)$ fort, la limite étant unique toute la suite converge. On a en particulier

$$\lim_{q\to\infty} \int_\Omega \nu_t^q(k_q)\,|\nabla_c\beta_j(k_q)|^2 = \int_\Omega g\,\beta_j(k)$$

ce qui avec (5.3.25) règle les deux premiers termes dans $I_{n,q}$.

Terme $J_{n,q}$. On met $J_{n,q}$ sous la forme

$$\text{(5.3.26)} \qquad \begin{cases} J_{n,q} = \displaystyle\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q) + \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\sqrt{\nu_t^q(k_q)} - \nu_t^n(k_n)\right)\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q). \end{cases}$$

L'entier n est toujours fixé et on fait tendre q vers ∞. La convergence faible de $(\beta_j(k_q))_{q>\nu}$ vers $\beta_j(k)$ dans $H_0^1(\Omega)$ permet d'affirmer, ν_t^n étant bornée et $\nabla_c\beta_j(k_n) \in [L^2(\Omega)]^3$

$$\lim_{q\to\infty} \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q) = \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k).$$

Il reste encore à passer à la limite dans le dernier terme de $J_{n,q}$. On écrit

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\sqrt{\nu_t^q(k_q)} - \nu_t^n(k_n)\right)\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q) = \\ \displaystyle\int_\Omega \left(\sqrt{\nu_t^n(\beta_j(k_n))}\,\sqrt{\nu_t^q(\beta_j(k_q))} - \nu_t^n(\beta_j(k_n))\right)\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q). \end{cases}$$

Soit

$$\ell_{n,q} \stackrel{def}{=} \sqrt{\nu_t^n(\beta_j(k_n))}\,\sqrt{\nu_t^q(\beta_j(k_q))} - \nu_t^n(\beta_j(k_n)).$$

Puisque la suite $(\nu_t^s)_{s>\nu}$ converge uniformément vers ν_t sur le compact $[-j, j]$, chacune de ces fonctions étant continues,

$(\ell_{n,q})_{q>\nu}$ est une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$.

La convergence p.p de la suite $(k_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vers k et la continuité de β_j permettent d'affirmer que pour n fixé

$$\lim_{q\to\infty} \ell_{n,q} = \sqrt{\nu_t^n(\beta_j(k_n))}\,\sqrt{\nu_t(\beta_j(k)) - \nu_t^n(\beta_j(k_n))} \stackrel{def}{=} \ell_n \tag{5.3.27}$$

dans $L^\theta(\Omega)$ fort pour tout $\theta < \infty$ et p.p, quitte à extraire une sous-suite. On note au passage que le même argument permet détablir aussi que

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = 0$$

dans les mêmes espaces et p.p.

Comme $(\nabla_c\beta_j(k_q))_{q>\nu}$ converge vers $\nabla_c\beta_j(k)$ dans $[L^2(\Omega)]^3$ faible, que $(\ell_{n,q})_{q>\nu}$ est bornée et converge vers ℓ_n p.p et $\nabla_c\beta_j(k_n) \in [L^2(\Omega)]^3$

$$\lim_{q\to\infty} \int_\Omega \ell_{n,q} \nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k_q) = \int_\Omega \ell_n \nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k).$$

Finalement en posant

$$\begin{cases} I_n = \displaystyle\int_\Omega g_n\,\beta_j(k_n) + \int_\Omega g\,\beta_j(k) - \\ 2\displaystyle\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) - 2\int_\Omega \ell_n\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k). \end{cases}$$

on a bien

$$\lim_{q\to\infty} I_{n,q} = I_n$$

ce qui conclut ce premier point.

ii) *Inégalité de norme*. Cette inégalité résulte d'un argument de convergence faible. D'une part

$$\sqrt{\nu_t^q(k_q)}\,\nabla_c\beta_j(k_q) = \sqrt{\nu_t^q(\beta_j(k_q))}\,\nabla_c\beta_j(k_q).$$

D'autre part $(\sqrt{\nu_t^q(\beta_j(k_q))})_{q>\nu}$ est bornée et converge p.p vers $(\sqrt{\nu_t^q(\beta_j(k))}$ car $(k_q)_{q>\nu}$ converge vers k p.p et $(\nu_t^q)_{q>\nu}$ converge uniformément vers ν_t sur les compacts de $\mathbb{R}$. Par conséquent

$$(\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) - \sqrt{\nu_t^q(k_q)}\,\nabla_c\beta_j(k_q))_{q>\nu}$$

converge faiblement vers

$$\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) - \sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c\beta_j(k)$$

dans $[L^2(\Omega)]^3$. En faisant tendre q vers l'infini dans (5.3.23) on déduit alors

$$
(5.3.28) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left|\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) - \sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c\beta_j(k)\right|^2 \le I_n = \lim_{q\to\infty} I_{n,q} \\ \displaystyle = \liminf_{q\to+\infty} \int_\Omega \left|\sqrt{\nu_t^n(k_n)}\,\nabla_c\beta_j(k_n) - \sqrt{\nu_t^q(k)}\,\nabla_c\beta_j(k_q)\right|^2 \end{cases}
$$

qui est l'inégalité annoncée.

iii) I_n *tend vers* 0. Rappelons que

$$
\begin{cases} \displaystyle I_n = \int_\Omega g_n\,\beta_j(k_n) + \int_\Omega g\,\beta_j(k) - \\ \displaystyle 2\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) - 2\int_\Omega \ell_n\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k). \end{cases}
$$

On étudie chaque terme l'un après l'autre. On note en premier lieu que des arguments déjà mentionnés assurent

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,\beta_j(k_n) = \int_\Omega g\,\beta_j(k).
$$

En utilisant $\beta_j(k)$ comme fonction test dans (5.3.22)

$$
\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) = \int_\Omega g_n\,\beta_j(k)
$$

et toujours avec des arguments déjà vus

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) = \int_\Omega g\,\beta_j(k).
$$

Donc

$$
\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega g_n\,\beta_j(k_n) + \int_\Omega g\,\beta_j(k) - 2\int_\Omega \nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k)\right) = 0.
$$

Il reste un terme à étudier dans I_n. Nous avons vu précédemment que $(\ell_n)_{n>\nu}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ et converge vers zéro p.p. Par conséquent, puisque $\beta_j(k) \in H_0^1(\Omega)$ la suite $(\ell_n\beta_j(k))_{n>\nu}$ converge vers 0 dans $[L^2(\Omega)]^3$ fort. Par ailleurs $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ converge vers $\beta_j(k)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible. Il en résulte que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \ell_n\,\nabla_c\beta_j(k_n)\,.\nabla_c\beta_j(k) = 0
$$

ce qui achève la preuve de le convergence de I_n vers 0.

Conclusion de la démonstration du lemme 5.3.5. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 5.3.4 on voit que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\nu_t^n(k_n)}\nabla_c\beta_j(k_n) = \sqrt{\nu_t(k)}\nabla_c\beta_j(k)$$

dans $[L^2(\Omega)]^2$ faible. L'inégalité (5.3.28) et la convergence de $(I_n)_{n>\nu}$ vers 0 assurent que cette convergence est forte. Toujours par un raisonnement semblable à celui de la preuve du lemme 5.3.4, on en déduit que $(\beta_j(k_n))_{n>\nu}$ converge vers $\beta_j(k)$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. $\diamondsuit$

5.3.5 — PASSAGE À LA LIMITE ET CONCLUSION

Il reste à franchir l'étape 5) pour achever la preuve du théorème 5.3.1 en vérifiant que le couple (ρ, k) est une solution renormalisée de $(5.0.1)$. On doit montrer que (ρ, k) satisfait les points $(5.2.1, 2, 3, 4, 5, 6)$ de la définition 5.2.1 d'une solution renormalisée. Ces points sont vérifiés les uns après les autres.

Points déjà acquis. Il résulte de ce qui précède que

— $(\rho, k) \in H_0^1(\Omega) \times \bigcap_{1\le p<3/2}$ (*cf.* corollaire 5.3.1),
— $\sqrt{\nu_t(k)}\,\nabla_c\rho \in [L^2(\Omega)]^3$ (*cf.* lemme 5.3.4),
— $\forall\, j \in \mathbb{R}_+^\star$, $\beta_j(k) \in H_0^1(\Omega)$ (*cf.* section 5.3.4, preuve du lemme 5.3.5),

ce qui règle les points $(5.2.1)$, $(5.2.2)$, $(5.2.3)$ et $(5.2.4)$.

vérification de $(5.2.5)$. On doit montrer

$$(5.2.5) \qquad \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q}\left(\int_{\{q\le|\,k\,|\le 2\,q\}} \nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2\right) = 0.$$

On démontre cette convergence en deux temps.

- Vérification de $(5.2.5.)$ pour chaque k_n,
- conclusion en faisant tendre n vers l'infini.

Vérification de $(5.2.5)$ *pour chaque* k_n *de manière uniforme.* Soit f_q la fonction telle que

— f_q est continue et impaire,
— f_q est nulle sur $[0, q]$, égale à 1 sur $[2q, \infty[$,
— f_q est affine sur $[q, 2q]$.

On multiplie l'équation $(5.3.3, b)$ par $f_q(k_n)$ puis on intègre par parties. Il vient

$$(5.3.29) \qquad \frac{1}{q}\int_{\{q\le|k_n|\le 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 \le \int_{\{q\le|k_n|\}} g_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 5.3.2

$$(5.3.30) \qquad \exists\,\delta > 0, \quad \forall\, A \subset \Omega, \quad mes(A) \le \delta, \quad \forall\, n \ge \nu, \quad \int_A g_n \le \varepsilon.$$

Comme la suite $(k_n)_{n\geq\nu}$ converge presque partout et dans $L^1(\Omega)$ fort vers k

$$\exists\, n_0 \geq \nu, \quad \exists\, q_0 \in I\!N, \quad \forall\, n \geq n_0, \quad \forall\, q \geq q_0, \quad mes\,\{|k_n| \geq q\} \leq \delta. \tag{5.3.31}$$

En combinant $(5.3.29)$ et $(5.3.30)$ à $(5.3.31)$, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, n_0 \geq \nu, \quad \exists\, q_0 \in I\!N, \quad \forall\, n \geq n_0, \quad \forall\, q \geq q_0, \\ \displaystyle\frac{1}{q}\int_{\{q\leq|k_n|\leq 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 \leq \varepsilon. \end{array}\right. \tag{5.3.32}$$

ce qui montre que

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\int_{\{q\leq|k_n|\leq 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 = 0$$

uniformément par rapport à n.

Passage à la limite dans $(5.3.32)$ *lorsque* n *tend vers l'infini*. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\{q\leq|k_n|\leq 2q\}} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 \;= \\ \displaystyle\int_{\{q\leq|\beta_{2q}(k_n)|\leq 2q\}} \nu_t^n(\beta_{2q}(k_n))\,|\nabla_c \beta_{2q}(k_n)|^2. \end{array}\right. \tag{5.3.33}$$

On a montré dans la preuve du lemme 5.3.5 que

$$\lim_{n\to\infty} \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\beta_{2q}(k_n)|^2 = \nu_t(k)\,|\nabla_c\beta_{2q}(k)|^2$$

dans $L^1(\Omega)$ fort. Donc en utilisant $(5.3.33)$ et en faisant tendre n vers l'infini dans $(5.3.32)$ on obtient $\forall\, q \geq q_0$,

$$\frac{1}{q}\int_{\{q\leq|\beta_{2q}(k)|\leq 2q\}} \nu_t(\beta_{2q}(k))\,|\nabla\beta_{2q}(k)|^2 = \frac{1}{q}\int_{\{q\leq|k|\leq 2q\}} \nu_t(k)\,|\nabla k|^2 \leq \varepsilon$$

montrant ainsi $(5.2.5)$.

Vérification de $(5.2.6)$. Il reste à passer à la limite dans les équations et montrer que le couple (ρ, k) satisfait $\forall\, h \in C_c^\infty(I\!R)$

$$\left\{\begin{array}{ll} (a) & \left\{\begin{array}{l} -div_c(h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c\rho) + h'(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k\,.\nabla_c\rho = f\,h(k) \\ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{array}\right. \\ (b) & \left\{\begin{array}{l} -div_c(h(k)\,\nu_t(k)\,\nabla_c k) + h'(k)\,\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2 = \\ \nu_t(k)\,|\nabla_c\rho|^2\,h(k), \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Le point de départ est le système $(5.3.3)$

$$(5.3.3)\qquad \begin{cases} (a) \quad - div_c(\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\rho_n) = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (b) \quad - div_c(\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n) = \nu_t^n(k_n)\,|\nabla\rho_n|^2 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

On fixe $h \in \mathcal{D}(I\!R)$ et on note j un entier tel que $supp(h) \subset [-j, j]$. On multiplie les équations $(5.3.3, a)$ et $(5.3.3, b)$ par $h(k_n)$

$$(5.3.34)\qquad \begin{cases} (a) \quad \begin{cases} -div_c(h(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\rho_n) + h'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n\,.\nabla_c\rho_n = \\ f\,h(k_n) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases} \\ (b) \quad \begin{cases} -div_c(h(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c k_n) + h'(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c k_n|^2 = \\ \nu_t^n(k_n)\,|\nabla_c\rho_n|^2\,h(k_n) \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)). \end{cases} \end{cases}$$

On note en premier lieu que

$$(5.3.35)\qquad h(k_n) = h(\beta_j(k_n)).$$

Les faits que h soit bornée continue combiné à $(5.3.35)$, $(\beta_j(k_n))_{n\geq\nu}$ converge vers $\beta_j(k)$ dans Ω p.p permettent d'affirmer

$$(5.3.36)\qquad \forall\, p \in [1, \infty[, \quad \lim_{n\to\infty} h(k_n) = h(k) \quad \textit{dans } L^p(\Omega)\,\textit{fort.}$$

On passe à la limite au sens des distributions dans chaque terme intervenant dans les équations en commençant par celle pour ρ. Dans la suite $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est fixée.

Terme $f\,h(k_n)$. On déduit de $(5.3.36)$ combiné à $f \in L^2(\Omega)$

$$(5.3.37)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\,h(k_n)\,\varphi = \int_\Omega f\,h(k)\,\varphi.$$

Terme $-div(h(k_n)\,\nu_t^n(k_n)\,\nabla_c\rho_n)$. D'une part

$$h(k_n)\,\nu_t^n(k_n) = h(\beta_j(k_n))\,\nu_t^n(\beta_j(k_n))$$

car $supp(h) \subset [-j, j]$. D'autre part $(\nu_t^n)_{n>\nu}$ converge vers ν_t sur les compacts de $I\!R$ et ces fonctions sont continues ainsi que β_j. Donc, puisque $(k_n)_{n>\nu}$ converge vers k p.p et que h est à support compact

$$(5.3.38)\qquad \begin{cases} \forall\, p \in [1, \infty[, \\ \lim_{n\to\infty} h(k_n)\,\nu_t^n(\beta_j(k_n)) = h(k)\,\nu_t(k) \quad \textit{dans } L^p(\Omega)\,\textit{fort.} \end{cases}$$

On sait par ailleurs que

$$(5.3.39)\qquad \textit{la suite } (\rho_n)_{n\geq\nu}\,\textit{converge vers } \rho\,\textit{dans } H_0^1(\Omega)\,\textit{fort.}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il en résulte

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(k_n)\, \nu_t^n(k_n))\, \nabla_c \rho_n \,.\nabla_c \varphi = \int_\Omega h(k)\, \nu_t(k)\, \nabla_c \rho \,.\nabla \varphi. \tag{5.3.40}$$

Terme $h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla_c k_n \,.\nabla \rho_n$. En utilisant toujours la même idée

$$h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla_c k_n \,.\nabla_c \rho_n = h'(\beta_j(k_n))\, \nu_t^n(\beta_j(k_n))\, \nabla_c \beta_j(k_n)\,.\nabla_c \rho_n.$$

Un résultat analogue à $(5.3.38)$ a lieu pour la suite $(h'(\beta_j(k_n))\, \nu_t^n(\beta_j(k_n)))_{n\geq\nu}$ que l'on combine à $(5.3.39)$ et le lemme 5.3.5 (convergence forte des troncatures) pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla_c k_n \,.\nabla_c \rho_n\, \varphi = \int_\Omega h'(k)\, \nu_t(k)\, \nabla_c k \,.\nabla_c \rho\, \varphi. \tag{5.3.41}$$

Conclusion partielle. En combinant $(5.3.37)$ et $(5.3.38)$ à $(5.3.41)$ on déduit que l'équation $(5.2.6, a)$ est satisfaite par (ρ, k) au sens des distributions. On considère à présent les termes de l'équation pour k.

Terme $\nu_t^n(k_n)\, |\nabla_c \rho_n|^2\, h(k_n)$ on déduit du fait que h soit bornée et des résultats antérieurs que $(h(k_n)\, \varphi)_{n\geq\nu}$ converge vers $h(k)\, \varphi$ dans L^∞ faible étoile. Ceci combiné au lemme 5.3.4 permet d'affirmer

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nu_t^n(k_n)\, |\nabla_c \rho_n|^2\, h(k_n)\, \varphi = \int_\Omega \nu_t(k)\, |\nabla_c \rho|^2\, h(k)\, \varphi. \tag{5.3.42}$$

Terme $div(h(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla_c k_n)$. On écrit comme d'habitude

$$h(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla k_n = h(\beta_j(k_n))\, \nu_t^n(\beta_j(k_n))\, \nabla_c \beta_j(k_n).$$

Le fait que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, \nabla_c k_n \,.\nabla_c \varphi = \int_\Omega h(k)\, \nu_t(k)\, \nabla_c k \,.\nabla_c \varphi \tag{5.3.43}$$

résulte du lemme 5.3.5 et d'arguments déjà utilisés de nombreuses fois.

Terme $h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, |\nabla k_n|^2$K. Le fait

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, |\nabla_c k_n|^2\, \varphi = \int_\Omega h'(k)\, \nu_t(k)\, |\nabla_c k|^2\, \varphi \tag{5.3.44}$$

résulte du lemme 5.3.5 en écrivant

$$h'(k_n)\, \nu_t^n(k_n)\, |\nabla_c k_n|^2 = h'(\beta_j(k_n))\, \nu_t(\beta_j(k_n))\, |\nabla_c \beta_j(k_n)|^2,$$

combiné aux arguments précédents.

Conclusion. En combinant enfin $(5.3.42)$ et $(5.3.43)$ à $(5.3.44)$, on a montré que (ρ, k) satisfait $(5.2.6, b)$ au sens des distributions, achevant ainsi la démonstration du théorème 5.3.1. $\diamondsuit$

REMARQUE 5.3.1 — Considérons à nouveau le système turbulent d'équations scalaires $(M3)$ dans le cas homogène étudié dans le §5.1

$$(M3) \qquad \begin{cases} (a) & \partial_t\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ (b) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho\,|^2\, + \mu_t(k)\,\partial_z\rho\, - k\,\sqrt{|\,k\,|}, \end{cases} \\ (c) & \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0, \quad (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\rho, \\ (d) & k|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad k|_{\,\Gamma_s} = 0, \\ (e) & (\rho,k)|_{t=0} = (\rho^0, k_0). \end{cases}$$

On suppose que les hypothèses (H.5.1), (H.5.2) et (H.5.3) ont lieu et que

— *μ_t est bornée.*

En revanche

— *on ne fait plus d'hypothèse de croissance sur ν_t.*

On dit que (ρ, k) est une solution faible-renormalisée du système $(M3)$ si et seulement si $\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$, $\partial_t\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$ et $\forall\, t \in [0,\mathcal{T}]$, $\forall\,\hat\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t <\partial_t\rho, \hat\rho> \,+ \mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat\rho \,+\, \alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho_j\,.\,\hat\rho\, + \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega(\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho_j\,.\,\partial_z\hat\rho = \int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,.\,\hat\rho, \end{cases}$$

$\forall\, j \in I\!R^\star_+$, $\beta_j(k) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_0(\Omega))$,

$$k \in \bigcap_{1\le p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}_0(\Omega))$$

et on a

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\left(\int_0^{\mathcal{T}}\int_{\{q\le|\,k\,|\le 2\,q\}}\nu_t(k)\,|\nabla_c k|^2\,dMdt\right) = 0.$$

De plus pour tout $h \in C_c^\infty(I\!R)$, en notant H une primitive de h,

$$\begin{cases} \partial_t(H(k)) - \lambda div(h(k)\,\nabla k) - \partial_z(h(k)\,\nu_t(k)\,\partial_z k) + \\ h'(k)\,(|\nabla_c k|^2 + \nu_t(k)\,|\partial_z k|^2) = (\nu_v^t(k)\,|\partial_z\rho|^2\, + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\,\sqrt{|\,k\,|}\,)\,h(k) \end{cases}$$

dans $\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ avec $(\rho,k)|_{t=0} = (\rho^0, k_0)$.

On peut montrer que le système $(M3)$ admet une solution faible-renormalisée. Le problème est ouvert dans le cas non homogène lorsque $\vec{\mathrm{v}} \neq 0$. $\diamondsuit$

On étudie dans le chapitre suivant les couplages de l'équation pour l'ECT avec les équations vectorielles de l'océanographie : les équations primitives et le système géostrophico-barotrope turbulent.

CHAPITRE 6

COUPLAGES AVEC LES ÉQUATIONS PRIMITIVES ET LE SYSTÈME GÉOSTROPHICO-BAROTROPE

ORIENTATION

1) On étudie dans ce chapitre les systèmes couplés $(M4)$ $(M5)$ et $(M6)$ obtenus à l'issue du chapitre 3.

• Le système $(M4)$ est le système couplé des équations primitives avec celle pour l'ECT

$$
(M4)\quad\begin{cases}
(a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v} - \nu_h \Delta \vec{v} - \\ \partial_z((\nu_v^t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}) + \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s + M(\nabla\rho) = 0, \end{cases} \\
(b) & div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\; dz) = 0, \\
(c) & \begin{cases} \partial_t \rho + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{\rho} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{\rho} - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \\ \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \end{cases} \\
(d) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\partial_z \vec{v}\,|^2 - k\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\,\partial_z \rho, \end{cases} \\
(e) & (\nu_t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(f) & (\mu_t(k) + \nu)\partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\,\rho, \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\
(g) & k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(h) & (\vec{v}, \rho, k)|_{t=0} = (\vec{v}_0, \rho^0, k_0).
\end{cases}
$$

Les inconnues sont la vitesse horizontale $\vec{v}$, la densité ρ, l'ECT k définies sur $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$ et la pression superficielle p_s définie sur $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$. De plus $Ro = 1$ et $\nu > 0, \mathcal{K}_h \geq \nu$, $\nu_h \geq \nu$, $\lambda \geq \nu$ et $\alpha \geq \nu$ sont des constantes. On fait les hypothèses :

(H.6.1) $(\vec{v}_0, \rho^0, k_0) \in \mathcal{Q}_{oc}^{0,2} \times L^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$, $k_0 \geq 0$ p.p dans Ω,

(H.6.2) F est une fonction continue de ρ et il existe une constante C telle que

$$\forall \rho \in I\!R, \quad |F(\rho)| \leq C(1 + |\rho|),$$

(H.6.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont des fonctions continues, ν_v^t et μ_t sont positives bornées, ν_t est minorée par $\nu > 0$ et $\nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0$,

(H.6.4) $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists C \in (I\!R^+)^2, \ \exists \theta \in [0, 2/3[\,; \ \forall k \in I\!R, \quad \nu_t(k) \leq C(1 + |\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée, dérivable de dérivée bornée.

Le système $(M5)$ est l'analogue du système $(M4)$ dans lequel on remplace les termes de transport par les termes de transport tronqué (*cf.* section 2.3.3).

• Le système $(M6)$ est le couplage du système géostrophico-barotrope avec l'équation pour l'ECT. Les inconnues sont la vitesse barotrope $\underline{\vec{v}}$ définie sur $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$, ρ, k et p_s.

$$(M6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}} \nabla) \underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot \underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{array} \right. \\ (b) & div \underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\ (c) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \vec{U}_g\,(p_s, \rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h \Delta \rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho) = \\ F(\rho) \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Omega, \end{array} \right. \\ (d) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla \rho|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z \rho - k\sqrt{|\,k\,|} \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Omega, \end{array} \right. \\ (e) & rot \underline{\vec{v}}|_{\partial \Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (f) & (\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\Gamma_s}, \quad \rho|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (g) & k|_{\Gamma_s} = m_b|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (h) & (\underline{\vec{v}}, \rho, k)|_{t=0} = (\underline{\vec{v}}_0, \rho^0, k_0). \end{array} \right.$$

Dans ce système, on fait les hypothèses (H.6.2), (H.6.3) et (H.6.4) combinées à

(H.6.5) $\underline{\vec{v}}_0 \in H^2(\Gamma_s)$, $div \underline{\vec{v}}_0 = 0$, $\underline{\vec{v}}_0.\,\vec{n}\,|_{\partial\Omega} = 0$, $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$, $k_0 \in L^1(\Omega)$ et $k_0 \geq 0$ p.p dans Ω,

(H.6.6) F est décroissante et $\forall x \in I\!R$, $sg(x)\,F(x) \leq 0$ (exemple de base $F(x) = -x$).

2) On ne dispose pas de résultat d'existence d'une solution pour le système $(M4)$ car

- on n'a pas d'égalité d'énergie à la limite dans les équations primitives à cause du manque de régularité du terme de transport,
- on ne sait pas renormaliser les équations primitives même dans le cas stationnaire, principalement à cause du terme de pression et de la contrainte.

En revanche, dans le cas du système $(M5)$ on dispose d'une égalité d'énergie satisfaite par les limites faibles des suites de solutions approchées grâce à la stabilité par passage à la limite du transport tronqué (*cf.* lemme 2.3.3). On démontre un résultat d'existence d'une solution faible à $(M5)$ en raisonnant comme dans l'étude du système couplé d'équations scalaires $(M3)$ (*cf.* §5.1, chapitre 5).
Il se pose ensuite le problème de faire tendre le paramètre de la troncature vers l'infini. En raisonnant comme dans le chapitre 2 on montre que les équations primitives sont conservées à la limite. En revanche, à cause du terme de production d'énergie, une mesure positive apparaît dans l'équation limite pour l'ECT dont on ne sait dire si elle est nulle ou non (*cf.* §6.1).

3) On montre un résultat d'existence d'une solution au système $(M6)$ lorsque la norme infinie de ρ^0, $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$, est assez petit ou bien que la constante ν est assez grande (*cf.* théorème 6.3.2). Ce résultat repose principalement sur

- une estimation L^∞ pour la densité,
- un argument de point fixe sur la pression superficielle p_s cherchée dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$.

On distingue trois grandes étapes dans la démonstration.

Étape 1) On commence par étudier l'équation pour ρ indépendamment des autres lorsque

$$k \in L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega)) \quad \text{et} \quad p_s \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$$

sont fixés en cherchant ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ (*cf.* théorème 6.2.1). La difficulté dans ce problème est due au terme de transport. Notons que la définition 3.3.1 implique

$$\forall\,(\rho, p_s) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)), \quad \vec{U}_g\,(p_s, \rho) \in L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$$

et cette régularité est optimale (*cf.* formules (3.3.3), section 3.3.2, §3.3, chapitre 3). C'est la même difficulté que dans les équations primitives.

> *Une estimation L^∞ uniforme sur ρ qui ne dépend ni de p_s ni de k (cf. §6.2) permet de contourner cette difficulté.*

L'hypothèse $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$ est nécessaire à l'obtention de cette estimation ainsi que (H.6.6) qui permet aussi d'obtenir un résultat *d'unicité* crucial pour la suite. L'égalité d'énergie pour ρ permet le couplage ultérieur avec l'équation pour l'ECT. Il faut noter que l'on ne peut pas utiliser le même argument avec les équations primitives à cause de la contrainte et de la pression superficielle.

Étape 2) On étudie ensuite le système géostrophico-barotrope non turbulent $(M11)$ où $k \in L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$ est fixé. Lorsque $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ est assez petite ou la constante ν est assez grande, on montre grâce à un argument de point fixe sur la pression que ce système possède une solution et on décrit la structure de l'ensemble de ses solutions (*cf.* théorème 6.3.2).
Le système $(M11)$ est entièrement déterminé par p_s qui n'est plus un multiplicateur de Lagrange. Grâce à l'hypothèse de régularité sur $\underline{\vec{v}}_0$ (*cf.* (H.6.5)), on dispose d'une estimation sur p_s dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$.

Étape 3) La connaissance de la structure de l'ensemble des solutions de $(M11)$ permet de construire des approximations au système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$ à l'aide de la méthode de temps de retard (*cf.* section 4.1.2). On arrive à passer à la limite dans les équations essentiellement grâce à l'estimation pour p_s dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$.

6. 1 — COUPLAGE AVEC LES ÉQUATIONS PRIMITIVES

6.1.1 — CAS DU TRANSPORT TRONQUÉ

On considère en premier lieu le système $(M5)$ avec des termes de transport tronqués

$$
(M5) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
(a) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{v} + B_j(\vec{v}) - \nu_h \Delta \vec{v} - \partial_z((\nu_v^t(k) + \nu_v)\, \partial_z \vec{v}) + \\ \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s + M(\nabla \rho) = 0, \end{array} \right. \\
(b) & div\left(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\, dz\right) = 0, \\
(c) & \partial_t \rho + C_j(\vec{v}, \rho) - \mathcal{K}_h \Delta \rho - \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho) = F(\rho), \\
(d) & \left\{ \begin{array}{l} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\, \partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\, |\partial_z \vec{v}\,|^2 - k\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\, \partial_z \rho, \end{array} \right. \\
(e) & (\nu_t(k) + \nu_v)\, \partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(f) & (\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\, \rho, \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\
(g) & k|_{\Gamma_s} = m_b\, |\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\
(h) & (\vec{v}, \rho, k)|_{t=0} = (\vec{v}_0, \rho^0, k_0).
\end{array}
\right.
$$

On rappelle que

$$M(\rho) = \int_z^0 \rho \, dz', \quad \tilde{M}(\vec{v}) = \int_{-H(x,y)}^0 \vec{v} \; dz$$

et que

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \{ v \in C^\infty(\Omega), \; v|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0 \}, \\ \mathcal{F} = \{ \vec{v} = \; u \, \vec{e}_1 + v \, \vec{e}_2, \, (u,v) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \; div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0 \}, \\ H^1_{f,l}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), \, u|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0 \right\}, \\ \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} = \left\{ \vec{v} = u \, \vec{e}_1 + v \, \vec{e}_2, \, (u,v) \in H^1_{f,l}(\Omega), \, div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0 \right\}. \end{cases}$$

L'espace $\mathcal{Q}^{0,2}_{oc}$ est l'adhérence de $\mathcal{F}$ dans $[L^2(\Omega)]^2$. Les termes de transport tronqués sont définis pour tout $(\vec{v}, \rho) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_{f,l}(\Omega)$, $j \in [1, +\infty[$ par

$$\begin{cases} \forall \, (\vec{x}, \tau) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1(\Omega), \\ < B_j(\vec{v}), \vec{x} > = - \int_\Omega (\vec{U}(\vec{v}) \, . \nabla_c) \, (\vec{x}) \, . \, \beta_j(\vec{v}), \\ < C_j(\vec{v}, \rho), \tau > = - \int_\Omega \beta_j(\rho) \, \vec{U}(\vec{v}) \, . \nabla_c \tau \end{cases} \tag{6.1.1}$$

où l'on note

$$\vec{U}(\vec{v}) = \vec{v} + W(\vec{v}) \, \vec{k}, \quad W(\vec{v}) = M(div \vec{v}) = \int_z^0 div \vec{v} \; .$$

Le triplet

$$(\vec{v}, \rho, k) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_{f,l}(\Omega)) \times \bigcap_{p<3/2} L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$$

est une solution faible de $(M5)$ lorsque les points i), ii) et iii) suivants sont vérifiés.

i) *Équation de transport.* $\partial_t \vec{v} \in L^2([0, \mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})')$ et

$$\begin{cases} \quad \forall \; \vec{x} \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}), \quad \forall \, t \in [0, \mathcal{T}], \\ \int_0^t < \partial_t \vec{v}, \vec{x} > + \int_0^t < B_j(\vec{v}), \vec{x} > + \nu_h \int_0^t \int_\Omega \nabla \vec{v} \, . \, \nabla \vec{x} \, + \\ \int_0^t \int_\Omega (\nu_v^t(k) + \nu_v) \, \partial_z \vec{v} \, . \, \partial_z \vec{x} \, - \int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}} \, . \, \vec{x} \, + \\ \int_0^t \int_\Omega \vec{k} \times \vec{v} \, . \, \vec{x} + \int_0^t \int_\Omega M(\nabla \rho) \, . \, \vec{x} = \; 0. \end{cases} \tag{6.1.2}$$

ii) *Équation de traceur.* $\partial_t \rho \in L^2([0, \mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$ et

$$(6.1.3) \qquad \begin{cases} \forall\, \hat\rho \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \quad \forall\, t \in [0, \mathcal{T}], \\ \displaystyle\int_0^t < \partial_t \rho, \hat\rho > + \int_0^t < C_j(\vec{v}, \rho), \hat\rho > + \mathcal{K}_h \int_0^t \int_\Omega \nabla\rho . \nabla\hat\rho + \\ \displaystyle\alpha \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho_j\, \hat\rho + \int_0^t \int_\Omega (\mu_t(k) + \nu)\, \partial_z \rho\, \partial_z \hat\rho = \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\, \hat\rho. \end{cases}$$

iii) *Équation pour l'ECT.*

$$(6.1.4) \qquad \begin{cases} \forall\, \varphi \in \mathcal{D}([0, \mathcal{T}] \times \Omega), \\ \displaystyle -\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega k\, \partial_t \varphi + \lambda \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nabla k . \nabla\varphi + \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nu_t(k)\, \partial_z k .\, \partial_z \varphi = \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \nu_v^t(k)\, |\, \partial_z \vec{v}\, |^2 \varphi + \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega \mu_t(k)\, \partial_z \rho\, \varphi - \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega k\sqrt{k}\, \varphi. \end{cases}$$

Enfin, si $(\vec{v}, \rho, k)$ est une solution faible de $(M5)$ on sait qu'il existe

$$p_s \in \mathcal{D}([0, \mathcal{T}], L^2(\Omega))$$

telle que $(\vec{v}, \rho, k, p_s)$ soit une solution au sens des distributions du système $(M5)$ (*cf.* la remarque 2.3.2 et la section 2.1.5, encore valables ici).

THÉORÈME 6.1.1 — *On suppose réalisées les hypothèses* (H.6.1), (H.6.2), (H.6.3) *et* (H.6.4). *Alors, le système* $(M5)$ *possède une solution faible*

$$(\vec{v}, \rho, k) \in L^2([0, \mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_{f,l}(\Omega)) \times \bigcap_{p<3/2} L^p([0, \mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$$

avec $k \geq 0$ *p.p.*

DÉMONSTRATION — La démonstration de ce résultat est *exactement la même* que celle du théorème 5.1.1 bien qu'il y ait une équation vectorielle supplémentaire. C'est la raison pour laquelle on n'écrit pas tous les détails et on se contente d'adapter la démonstration du théorème 5.1.1 au cas présent. De même on ne fait pas la distinction $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait une hypothèse de croissance ou $\nu_t \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t bornée de dérivée bornée, sachant que cette alternative ne joue un rôle que pour l'obtention d'estimation dans l'équation pour k. Enfin, la positivité de k résulte de $\nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0$ (*cf.* §4.4).

On se place donc pour simplifier dans le cas homogène et on suppose que (H.6.1), (H.6.2), (H.6.3) et (H.6.4) ont lieu.

En bornant par troncature le terme de production et la viscosité ν_t on construit une suite de solutions faibles approchées à $(M5)$

$$(\vec{v}_n, \rho_n, k_n) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_{f,l}(\Omega) \times H^1_0(\Omega)).$$

Il est inutile de réécrire les équations. Le problème qui se pose est le passage à la limite dans les équations lorsque n tend vers l'infini. On passe à la limite dans les termes de transports tronqués grâce au lemme 2.3.3 (section 2.3.4, §2.3, chapitre 2). La passage à la limite dans les termes de diffusion, de Coriolis et les termes de couplage est standard.

Comme dans la démonstration du théorème 5.1.1, la difficulté est due au terme de production qui dans cet exemple vaut $\nu^t_v(k_n)|\partial_z \vec{v}_n|^2$. Cette difficulté est contournée par une égalité d'énergie satisfaite à la limite.

Le plan de la suite de la démonstration est le même que pour le théorème 5.1.1 et condensé comme suit.

- Estimations a priori, d'abord pour $(\vec{v}_n, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- égalité d'énergie puis passage à la limite.

On choisit $\vec{v}_n$ et ρ_n comme fonction test dans les équations pour la vitesse et pour la densité. Le transport tronqué ne contribue pas au bilan d'énergie car il ne travaille pas (*cf.* lemme 2.3.2). En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2.4.1 (*cf.* section 2.4.1) et comme dans la section 5.1.2, on voit que $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans

$$L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], [L^2(\Omega)]^2), \quad L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], L^2(\Omega))$$

respectivement.

D'après les résultats du chapitre 4, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans

$$\bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}], L^1(\Omega)).$$

On combine le lemme 2.3.1, le lemme 4.2.4 et le raisonnement de la section 5.2.1. On en déduit que les suites $(\partial_t \vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\partial_t \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_t k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans

$$L^2([0,\mathcal{T}], (\mathcal{Q}^{1,2}_{oc})'), \quad L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))'), \quad L^1([0,\mathcal{T}], W^{-1,q_0}(\Omega)), \quad (q_0 > 1)$$

respectivement. Le lemme d'Aubin, le lemme 2.1.5 (espaces emboités) et le lemme d'interpolation 4.2.3 (*cf.* section 4.2.3) montrent l'existence de

$$(\vec{v}, \rho, k) \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times \bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$$

limite d'une suite extraite de $(\vec{v}_n, \rho_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (toujours notée de la même manière) et telle que

- $(\vec{v}_n, \rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\vec{v}, \rho)$ dans $L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible, dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ fort et p.p,
- $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers k dans $L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega))$ faible ($p < 3/2$ est fixé), dans $L^s([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort ($s < 2$) et p.p.

Le triplet $(\vec{v}, \rho, k)$ satisfait $(6.1.2)$ et $(6.1.3)$ grâce au lemme 2.3.3 (passage à la limite dans le transport tronqué), la continuité de ν^t_v et μ_t et le fait qu'elles soient bornées, la sous linéarité et la continuité de F.

Prendre $\vec{v}$ comme fonction test dans $(6.1.2)$ conduit à l'égalité d'énergie satisfaite après passage à la limite. Un raisonnement analogue à celui de la preuve du théorème 5.1.1 avec $\vec{v}$ à la place de ρ (ν^t_v est bornée) montre que

$$(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \vec{v} \text{ dans } L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}) \text{ fort.}$$

On passe à la limite dans l'équation pour k comme dans la section 4.2.5 (*cf.* §4.2, chapitre 4) et on en déduit que $(6.1.4)$ est satisfait. $\diamondsuit$

6.1.2 — UN TERME SUPPLÉMENTAIRE DANS L'ÉQUATION POUR L'ECT ?

Il se pose naturellement le problème de faire tendre j vers l'infini dans $(M5)$ ce qui conduit au résultat suivant.

THÉORÈME 6.1.2 — *On suppose réalisées les hypothèses* (H.6.1) *(régularité des données initiales),* (H.6.2) *(F continue sous-linéaire),* (H.6.3) *(continuité des viscosités, positivité et bornitude de ν^t_v et μ_t, $\nu^t_v(0) = \mu_t(0) = 0$, $\nu_t \geq \nu$),* (H.6.4) *(hypothèse de croisance ou de bornitude sur ν_t suivant que $\vec{\mathrm{v}} = 0$ ou non et régularité de $\vec{\mathrm{v}}$). Alors, il existe*

— *une mesure positive m*

— *$(\vec{v}, \rho, p_s, k)$ où*

$$\begin{cases} \vec{v} \in L^2([0,\mathcal{T}], \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}), \quad \rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \\ p_s \in \mathcal{D}'([0,\mathcal{T}], W^{-1,2}(\Gamma_s)), \quad k \in \displaystyle\bigcap_{1\leq p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W^{1,p}(\Omega)), \quad k \geq 0, \\ \end{cases}$$

tels que $(\vec{v}, \rho, p_s, k)$ *soit une solution au sens des distributions du système*

$$(M4\infty) \quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \vec{v} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{v} - \nu_h \Delta \vec{v} - \\ \partial_z((\nu_v^t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}) + \vec{k} \times \vec{v} + \nabla p_s + M(\nabla\rho) = 0, \end{cases} \\ (b) & div(\displaystyle\int_{-H(x,y)}^{0} \vec{v}\, dz) = 0, \\ (c) & \begin{cases} \partial_t \rho + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{\rho} + W(\vec{v})\,\partial_z \vec{\rho} - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \\ \partial_z((\mu_t(k) + \nu)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \end{cases} \\ (d) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda \Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\partial_z \vec{v}\,|^2 + m - k\sqrt{|\,k\,|} + \mu_t(k)\,\partial_z \rho, \end{cases} \\ (e) & (\nu_t(k) + \nu_v)\,\partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (f) & (\mu_t(k) + \nu)\partial_z \rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\,\rho, \quad \rho|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0, \\ (g) & k|_{\Gamma_s} = m_b\,|\,\vec{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (h) & (\vec{v}, \rho, k)|_{t=0} = (\vec{v}_0, \rho^0, k_0) \end{cases}$$

dans $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$. $\diamondsuit$

Il faut noter que $(M4\infty)$ est presque $(M4)$. Seule l'équation pour l'ECT est changée car un terme supplémentaire est présent dans le second membre dont on ne sait pas dire s'il est nul ou non. On sait juste que le support de m est inclus dans l'ensemble où $\partial_z \vec{v}$ est infini, un ensemble de mesure nulle.

> *On conjecture que la nullité ou non de cette mesure dépend des données initiales et qu'il existe des exemples où la mesure* m *peut ne pas être nulle lorsque les données ne sont pas bien préparées.*

Cette conjecture est motivée par

- le résultat d'existence pour le système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$ (*cf.* théorème 6.3.2 dans ce qui suit),
- le résultat de GRENIER [1] qui étudie le passage à la limite dans les équations lorsque Ro tend vers 0 (*cf.* aussi l'appendice B pour un exemple simplifié) et qui met des oscillations en évidence,
- les résultats de régularité de CHEMIN [1] dans le cas de données bien préparées et lorsque Ro est assez petit.

DÉMONSTRATION — Ce résultat est la synthèse des résultats des chapitres 2, 4 et 5. Soit $(\vec{v}_j, \rho_j, k_j)$ une solution de $(M5)$ pour j donné.

En recopiant le paragraphe 2.4 du chapitre 2 mot pour mot en remplaçant T par ρ et en se servant du fait que ν_v^t et μ_t sont positives bornées (avec $\vec{\mathrm{v}}=0$ ou bien $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ ce qui ne change rien aux estimations), on voit que $(\vec{v}_j,\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_t\vec{v}_j,\partial_t\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans

$$L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}\times H_{f,l}^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad L^1([0,\mathcal{T}],(\mathcal{Q}_{oc}^{2,2})'\times(W^{2,2}(\Omega))')$$

respectivement.ÃÐ En particulier,

$$(\nu_v^t(k_j)|\partial_z\vec{v}|^2)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega).$$

En recopiant les sections 4.2.3 et 4.2.4 (cas $\vec{\mathrm{v}}=0$ et ν_t satisfait une hypothèse de croissance) ou le paragraphe 4.3 (cas $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et $\nu_t\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$) on voit que $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_t k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans

$$\bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega)) \quad \text{et} \quad L^1([0,\mathcal{T}],W^{-1,q_0}(\Omega))$$

respectivement.

Sur cette base, le processus d'extraction de sous-suite suit le shéma de la proposition 2.5.1 (*cf.* section 2.5.2) et celui de la section 4.2.5. Il existe donc $(\vec{v},\rho,k)$ tel que les points *i)*, *ii)*, *iii)*, *iv)* et *v)* de la proposition 2.5.1 soient satisfaits (en remplaçant T_j et T par ρ_j et ρ) et tel que les points 1), 2), 3) et 4) de la section 4.2.5 soient vérifiés.

En recopiant la suite du paragraphe 2.5 avec pour variante les faits que ν_v^t et μ_t sont continues et bornées (*cf.* aussi la section 5.1.3), on vérifie que $(\vec{v},\rho,k)$ est solution du problème (Faib1) (*cf.* la définition 2.2.1 dans la section 2.2.1) dans lequel on adapte les termes de diffusion turbulente et les termes de bord dans la deuxième équation.

L'existence de

$$p_s\in\mathcal{D}'([0,\mathcal{T}],W^{-1,2}(\Gamma_s)$$

telle que le système $(M4\infty,a,b,c,e,f)$ ait lieu au sens des distributions résulte de la proposition 2.2.1 (*cf.* section 2.2.2). Mais

on n'a pas d'égalité d'énergie satisfaite par $(\vec{v},\rho)$.

Pour cette raison on ne sait pas montrer que la suite $(\vec{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{v}$ dans $L^2([0,\mathcal{T}],\mathcal{Q}_{oc}^{1,2})$ fort. En raisonnant comme dans la section 5.1.3 du §5.1 chapitre 5, on note que tous les termes dans l'équation pour k passent à la limite sauf le terme de production $\nu_v^t(k_j)\,|\partial_z\vec{v}_j|^2$. Comme

- $(\sqrt{\nu_v^t(k_j)}\,|\partial_z \vec{v}_j\,|)_{j\in I\!N}$ converge faiblement vers $\sqrt{\nu_v^t(k)}\,|\partial_z \vec{v}\,|$ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$,

il existe une mesure positive de défaut m telle que

$$\lim_{j\to\infty} \nu_v^t(k_j)\,|\partial_z \vec{v}_j\,|^2 = m + \nu_v^t(k)\,|\partial_z \vec{v}\,|^2$$

au sens vague des mesures, ce qui achève la démonstration. $\diamondsuit$

REMARQUE 6.1.1 — Un resultat analogue est vérifié lorsque F vérifie une condition de croissance sous critique plus générale que (H.6.2). $\diamondsuit$

L'analyse des système couplés de la turbulence avec les équations primitive se termine ici.

6. 2 — L'ÉQUATION POUR LA DENSITÉ AVEC UNE DONNÉE INITIALE BORNÉE

6.1.1 — ORIENTATION

À partir de maintenant on se dirige vers la démonstration d'un résultat d'existence pour le système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$. Celle-ci sera complète d'ici la fin du paragraphe suivant. Trois étapes sont nécessaires à sa démonstration.

Étape 1) Étude de l'équation pour la densité avec une donnée initiale bornée, $p_s \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))$ et $k \in L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$ fixés.

Étape 2) Étude du système géostrophico-barotrope non turbulent $(M11)$ en fixant $k \in L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega))$.

Étape 3) Existence d'une solution au système géostrophico-barotrope turbulent.

Ce paragraphe constitue la première étape et a pour but l'analyse du problème

$$(M9)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ \rho|_{\,t=0} = \rho^0, \quad \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad a(t,M)\,\partial_z\,\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\,\Gamma_s}. \end{cases}$$

Dans $(M9)$, $a(t,M)$ est mesurable sur $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$ (par exemple $a(t,M)=\nu_t(k)$). On rappelle que le champ géostrophique est défini dans le chapitre 3 par

$$\vec{U}_g\,(p_s,\rho) \;=\; U_g(p_s,\rho)\,\vec{e}_1 + V_g(p_s,\rho)\,\vec{e}_2$$

où

$$(3.3.3)\qquad \begin{cases} U_g(p_s,\rho) = -M(\partial_y\rho) - \,\partial_y p_s, \\ V_g(p_s,\rho) = M(\partial_x\rho) + \,\partial_x p_s, \end{cases}$$

M étant la moyenne verticale $M(f) = \int_z^0 f\,dz'$.

Les hypothèses dans ce paragraphe sont les suivantes :

(H.6.2) F est une fonction continue de ρ et il existe une constante C telle que

$$\forall\, \rho \in I\!R, \quad |F(\rho)| \leq C(1 + |\rho|),$$

(H.6.6) F est décroissante et

$$\forall\, x \in I\!R, \quad sg(x)\, F(x) \leq 0,$$

sg est la fonction “signe",

(H.6.7) pour presque tout $(t, M) \in [0, \mathcal{T}] \times \Omega$

$$\nu \leq a(t, M) \leq \beta,$$

β est une constante,

(H.6.8) $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$,

(H.6.9) $p_s \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$ est fixé. ÃÐ

On pose

$$C_H = \sup_{(x,y)\in\Gamma_s} H(x, y),$$

et on rappelle que $\mathcal{K}_h \geq \nu > 0$ et $\alpha \geq \nu > 0$.

THÉORÈME 6.2.1 — *On suppose que les hypothèses* (H.6.2)*,* (H.6.6)*,* (H.6.7)*, et* (H.6.8) *sont satisfaites.*

1) Existence. *Lorsque* (H.6.9) *est vérifiée (p_s fixée), le problème* $(M9)$ *admet une solution faible*

$$\rho \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega) \quad avec \quad \partial_t \rho \in L^2([0, \mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$$

telle que

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \tag{6.2.1}$$

et telle que pour tout $\hat{\rho} \in L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et pour tout $t \in [0, \mathcal{T}]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t < \partial_t \rho, \hat{\rho} > - \int_0^t \int_\Omega \rho\, \vec{U}_g\, (p_s, \rho)\, .\nabla \hat{\rho} \,+\, \mathcal{K}_h \int_0^t \int_\Omega \nabla \rho . \nabla \hat{\rho} + \\ \displaystyle\alpha \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho\, \hat{\rho} \,+ \int_0^t \int_\Omega a(t, M)\, \partial_z \rho\, \partial_z \hat{\rho} = \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\, \hat{\rho}. \end{array} \right. \tag{6.2.2}$$

2) Unicité et application ρ_a. *Lorsque*

$$\mathcal{K}_h > ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)} \left(2\, C_H + \frac{1}{2} \right) \tag{6.2.3}$$

la solution ρ pour p_s fixée est unique et notée $\rho_a(p_s)$. Cela permet de définir l'application

$$(6.2.4) \qquad \rho_a : \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)), \\ \qquad\qquad p_s \longrightarrow \rho_a(p_s). \end{cases}$$

L'application ρ_a est κ lipschitzienne où κ est déterminée par

$$(6.2.5) \qquad \kappa^2 \stackrel{def}{=} \frac{||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\,C_H}{2\,inf(\nu,(\mathcal{K}_h-\,||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}(2\,C_H+1/2)))}.$$

3) Égalité d'énergie. *Enfin, ρ satisfait l'égalité d'énergie*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho^0)^2 + \mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega |\nabla\rho|^2 + \\ \int_0^t\int_\Omega a(t,M)|\partial_z\rho|^2 + \alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho^2 = \int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\rho \end{cases}$$

vérifiée pour tout $t\in[0,\mathcal{T}]$. $\diamondsuit$

La notation $\rho_a(p_s)$ indique la dépendance de la solution de $(M9)$ par rapport à p_s mais également par rapport à la viscosité a.

Avant d'entamer la démonstration de ce théorème quelques commentaires s'imposent.

1) On note que

$$\begin{cases} \forall\,(p_s,\rho)\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))\times L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)), \\ \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\in[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^2. \end{cases}$$

Par conséquent, pour $\hat\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ le terme

$$\int_0^t\int_\Omega \rho\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\hat\rho$$

dans (6.2.2) est bien défini car $\rho\in L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. Une des difficultés dans le problème $(M9)$ est l'obtention de l'estimation (6.2.1). Elle est obtenue grâce aux hypothèses (H.6.8) (ρ^0 bornée) et (H.6.6), en particulier $sg(x)\,F(x)\le 0$.

2) L'unicité est essentielle à la suite de l'étude du système géostrophico-barotrope. La décroissance de F (*cf.* (H.6.6)) est nécessaire au résultat d'unicité obtenu lorsque $\mathcal{K}_h$ est assez grand (*i.e.* ν assez grand) ou $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ est assez petit (*cf.* (6.2.3)).

3) Il faut noter que lorsque ρ^0 est fixé

$$(6.2.7) \qquad \lim_{\nu\to+\infty}\kappa = 0$$

(on rappelle que $\alpha\ge\nu$, $\mathcal{K}_h\ge\nu$) et que lorsque ν est fixé

$$(6.2.8) \qquad \lim_{||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\to 0}\kappa = 0,$$

κ est définie par $(6.2.5)$. Donc, lorsque les constantes de diffusion sont assez grandes ou $||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ est assez petit, l'application ρ_a définie par $(6.2.4)$ est contractante indépendamment du choix de a tant que celle-ci vérifie (H.6.7).

Ce point est la clef de la résolution du système géostrophico-barotrope.

Le théorème 6.1.1 sera entièrement démontré d'ici la fin de ce paragraphe. Afin de bien distinguer le rôle de chaque hypothèse, on étudie d'abord le problème obtenu à partir de $(M9)$ en remplaçant le champ géostrophique par un champ fixé dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ puis on adapte les résultats obtenus au cas de $(M9)$.

6.2.2 — OBTENTION DE LA BORNE L^∞ ET UNICITÉ AVEC UN CHAMP FIXÉ

Dans cette section, on se place dans le cadre général du problème

$$\text{(6.2.9)} \qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \vec{b}\,.\nabla_c\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ \rho|_{\,t=0} = \rho^0 \in L^\infty(\Omega),\ \ \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0,\ \ a(t,M)\,\partial_z\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho. \end{cases}$$

On suppose que le champ $\vec{b} = z_1\,\vec{e}_1 + z_2\,\vec{e}_2 + z_3\,\vec{k}$ satisfait

(H.6.10) $\vec{b} \in [L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3,\ \ div_c\vec{b} = 0,\ \ \vec{b}\,.\,\vec{k}\,|_{\,\Gamma_s} = 0.$

THÉORÈME 6.2.2 — *On suppose satisfaites les hypothèses* (H.6.2) *(F continue sous linéaire),* (H.6.6) *(F décroissante et $sg(x)\,F(x)\le 0$),* (H.6.7) *(a majorée et minorée par $\nu>0$),* (H.6.8) *($\rho^0\in L^\infty(\Omega)$) et* (H.6.10)*. Alors, le problème* (6.2.9) *possède une unique solution faible*

$$\rho \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$$

telle que

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \le ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

De plus, $\partial_t\rho \in L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$ et

$$\text{(6.2.2)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t <\partial_t\rho,\hat\rho> - \int_0^t\int_\Omega \rho\,\vec{b}\,.\nabla_c\hat\rho + \mathcal{K}_h\int_0^t\int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat\rho + \\ \displaystyle\alpha\int_0^t\int_{\Gamma_s}\rho\,\hat\rho + \int_0^t\int_\Omega a(t,M)\,\partial_z\rho\,\partial_z\hat\rho = \int_0^t\int_\Omega F(\rho)\,\hat\rho \end{cases}$$

pour tout $\hat\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ et tout $t\in[0,\mathcal{T}]$. $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On montre ce résultat d'abord lorsque $\vec{b}\in[C^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ puis lorsque $\vec{b}\in[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ en raisonnant par approximations.

Cas $\vec{b}\in[C^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$. Comme F est sous linéaire, que a est minorée par $\nu>0$ et majorée et $\rho^0\in L^\infty(\Omega)$, on déduit des résultats de LIONS [1] que $(6.2.9)$ possède une solution faible $\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ telle que $\partial_t\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$. Il faut montrer que

— $\rho \in L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ et $||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}$,
— la solution est unique.

Estimation L^∞. Soient $(j,p) \in [\mathbb{R}_\star^+]^2$. On choisit

$$\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2} \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$$

comme fonction test dans (6.2.9) en posant

$$\gamma_{j,p}(u) \stackrel{def}{=} \int_0^u \beta_j(u')\,|\beta_j(u')|^{p-2}\,du' \tag{6.2.10}$$

où β_j est la fonction de troncature à hauteur j. On intègre par parties en espace. On considère d'abord le terme de transport en utilisant l'hypothèse (H.6.10)

$$div_c \vec{b} = 0, \quad \vec{b}\,.\,\vec{k}\,|_{\Gamma_s} = 0$$

combiné au fait que $\beta_j(\rho)$ est nulle sur $\Gamma_f \cup \Gamma_l$. Il vient

$$\int_\Omega \beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}\ \vec{b}\,.\nabla_c\rho = -\int_\Omega \rho\ \vec{b}\,.\nabla_c(\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}).$$

Mais comme

$$\nabla_c(\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}) = (p-1)|\beta_j(\rho)|^{p-2}\nabla_c\beta_j(\rho)$$

et que $\nabla_c\beta_j(\rho)$ est nul lorsque $|\rho| > j$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega \rho\ \vec{b}\,.\nabla_c(\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}) = (p-1)\int_\Omega \beta_j(\rho)|\beta_j(\rho)|^{p-2}\ \vec{b}\,.\nabla_c(\beta_j(\rho)) = \\ \displaystyle\frac{p-1}{p}\int_\Omega \vec{b}\,.\nabla_c(|\beta_j(\rho)|^p). \end{array} \right.$$

En intégrant de nouveau par parties, on en déduit que la contribution du terme de transport est nulle *i.e.*

$$\int_\Omega \beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}\ \vec{b}\,.\nabla_c\rho = 0.$$

On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\frac{d}{dt}\int_\Omega \gamma_{j,p}(\rho) + \\ \displaystyle(p-1)\int_\Omega \beta_j'(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}\left(\mathcal{K}_h|\nabla\rho\,|^2 + a(t,M)\,|\,\partial_z\rho|^2\right) + \\ \displaystyle\alpha\int_{\Gamma_s} \rho\,\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2} = \int_\Omega \beta_j(\rho)\,F(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}. \end{array} \right. \tag{6.2.11}$$

En combinant le fait que β_j soit une fonction impaire à $sg(x)\,F(x) \leq 0$ (*cf.* (H.6.6)), on a

$$0 \leq \rho\,\beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}, \quad \beta_j(\rho)\,|\beta_j(\rho)|^{p-2}\,F(\rho) \leq 0.$$

Par ailleurs, comme β_j est une fonction croissante les termes de diffusion apportent une contribution positive. Par conséquent en intégrant $(6.2.11)$ par rapport au temps sur $[0,t]$

$$\int_\Omega \gamma_{j,p}(\rho(t,M))\,dM \leq \int_\Omega \gamma_{j,p}(\rho^0). \tag{6.2.12}$$

On remarque ensuite que lorsque p est fixé

$$\lim_{j\to\infty} \gamma_{j,p}(u) = (1/p)\,|\,u\,|^p$$

simplement sur $I\!R$ et uniformément sur les compacts de $I\!R$. Comme ρ^0 est bornée, le théorème de Lebesgue implique que

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \gamma_{j,p}(\rho^0) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\,\rho^0|^p.$$

On en déduit en passant à la limite dans $(6.2.12)$ lorsque j tend vers l'infini à p fixé et en utilisant le Lemme de Fatou (tous les intégrants sont positifs et $|\,\rho| < \infty$ p.p)

$$\forall\, t \in [0,\mathcal{T}], \quad ||\,\rho(t,.)||_{L^p(\Omega)} \leq ||\,\rho^0||_{L^p(\Omega)}.$$

On fait tendre enfin p vers l'infini. On obtient

$$||\,\rho(t,.)||_{L^\infty(\Omega)} \leq ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$$

car $mes(\Omega) < \infty$ et $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$ (*cf.* RUDIN [1]). Cela implique

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

Unicité. Soient ρ_1 et ρ_2 deux solutions de $(6.2.9)$. On pose

$$\delta = \rho_1 - \rho_2.$$

Cette fonction satisfait

$$\begin{cases} \partial_t\delta + \vec{b}\,.\nabla_c\delta - \mathcal{K}_h\Delta\delta - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\delta) = F(\rho_1) - F(\rho_2), \\ \delta|_{\,t=0} = 0,\ \ \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0,\ \ a(t,M)\,\partial_z\delta|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\delta. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

On multiplie $(6.2.13)$ par δ puis on intègre par parties sur Ω. Le fait que $\vec{b}$ soit incompressible combiné aux conditions aux limites (*cf.* (H.6.10)) implique que la contribution du terme de transport est nulle. Les termes de diffusion apportent une contribution positive de sorte que

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega |\rho_1-\rho_2|^2 \le \int_\Omega (\rho_1-\rho_2)\,(F(\rho_1)-F(\rho_2)).$$

Puisque F est décroissante (*cf.* (H.6.6)), $(\rho_1-\rho_2)\,(F(\rho_1)-F(\rho_2)) \le 0$. Par conséquent

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega |\rho_1-\rho_2|^2 \le 0.$$

Comme $\rho_1-\rho_2$ est nul au temps $t=0$ il en est de même pour tout temps. Donc $\rho_1=\rho_2$ et la solution est unique. Ce raisonnement met en évidence que l'on suppose $sg(x)\,F(x)\le 0$ et $\rho^0\in L^\infty(\Omega)$ pour obtenir l'estimation L^∞ et F décroissante pour obtenir l'unicité.

Cas $\vec{b}\in [L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$. Soit $(\vec{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[C^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ vérifiant (H.6.10) et telle que

$$\lim_{n\to\infty}\vec{b}_n=\vec{b} \quad \text{dans} \quad [L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3 \quad \text{fort.}$$

En appliquant le résultat précédent, on sait qu'il existe une et une seule $\rho_n\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ telle qu'au sens faible

$$(6.2.14)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho_n+\vec{b}_n.\nabla_c\rho_n-\mathcal{K}_h\Delta\rho_n-\partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho_n)=F(\rho_n),\\ \rho_n|_{t=0}=\rho^0\in L^\infty(\Omega),\ \rho_n|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\ a(t,M)\,\partial_z\rho_n|_{\Gamma_s}=-\,\alpha\,\rho_n, \end{cases}$$

avec pour tout entier n

$$(6.2.15)\qquad ||\rho_n||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}\le||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

On prend ρ_n comme fonction test dans (6.2.14) puis on intègre par parties. Les conditions aux limites et (H.6.10) conduisent à

$$\int_\Omega \rho_n\ \vec{b}_n.\nabla_c\rho_n=0.$$

Les hypothèses (H.6.2) (F continue sous linéaire) (H.6.7) (a majorée et minorée par $\nu>0$) et un raisonnement analogue à celui de la section 5.1.2 (*cf.* §5.1, chapitre 5) impliquent que

— $(\rho_n)_{n\in I\!\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))\cap L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$.

Pour passer à la limite lorsque n tend vers l'infini on a besoin de compacité. Il faut pour cela estimer $\partial_t\rho_n$. La seule difficulté pour obtenir cette estimation réside dans le terme de transport. On est “sauvé" grâce à la borne L^∞ sur ρ_n.

À l'aide d'une intégration par parties utilisant (H.6.10) et les conditions aux limites, il est naturel de poser

$$\forall\,\hat\rho\in H^1_{f,l}(\Omega),\quad <\vec{b}_n.\nabla_c\rho_n,\hat\rho>=-\int_\Omega \rho_n\ \vec{b}_n.\nabla_c\hat\rho.$$

En se servant de $(6.2.15)$ on a pour $t\in[0,\mathcal{T}]$ fixé

$$|<\vec{b}_n.\nabla_c\rho_n,\hat\rho>|\le||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}||\vec{b}_n||_{[L^2(\Omega)]^3}||\hat\rho||_{H^1_{f,l}(\Omega)}.$$

Comme $(\vec{b}_n)_{n\in I\!\!N}$ est convergente dans $[L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)]^3$ elle y est bornée. Ainsi défini, le terme de transport de $(6.2.14)$ est borné dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$. Il en est de même pour les autres termes et donc

— $(\partial_t\rho_n)_{n\in I\!\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$.

Par conséquent, il existe $\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ tel que quitte à extraire une sous-suite

— $(\rho_n)_{n\in I\!\!N}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ faible, dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort et p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$.

Enfin, on sait grâce à $(6.2.15)$ que $(\rho_n)_{n\in I\!\!N}$ est bornée dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers un certain $\hat\rho$ dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible étoile. L'unicité de la limite assure que $\hat\rho=\rho$ et par passage à la limite faible dans $(6.2.15)$,

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}\le||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

Il reste à

— passer à la limite dans l'équation,

— montrer l'unicité de la solution obtenue.

Le passage à la limite dans l'équation lorsque n tend vers l'infini se fait exactement comme dans la section 5.1.3 au terme de transport près. D'ailleurs, les termes de diffusion sont plus simples ici que dans le problème de la section 5.1.3. Soit $\hat\rho\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$. On a

$$\lim_{n\to\infty}\vec{b}_n.\nabla_c\hat\rho=\vec{b}\ .\nabla_c\hat\rho\quad\text{dans}\quad L^1([0,\mathcal{T}]\times\Omega)\quad\text{fort.}$$

Comme $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ converge vers ρ dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible étoile

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^t <\vec{b}_n.\nabla_c\rho_n,\hat{\rho}> = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega \rho_n\ \vec{b}_n.\nabla_c\hat{\rho} = \\ \displaystyle\int_0^t\int_\Omega \rho\ \vec{b}.\nabla_c\hat{\rho}\ =\ \int_0^t <\vec{b}.\nabla_c\rho,\hat{\rho}> \end{cases}$$

pour tout $t\in[0,\mathcal{T}]$ ce qui conclut la question de l'existence d'une solution.

L'unicité de la solution s'obtient comme dans le cas où $\vec{b}$ est régulier en se servant de la monotonie de F et en vérifiant

$$<\vec{b}.\nabla_c\rho,\rho> = 0,$$

une identité maintenant classique. $\diamondsuit$

REMARQUE 6.2.1 — On peut remplacer dans (H.6.6) "$\forall\, x\in I\!R$, $sg(x)\,F(x)\le 0$" par

$$\exists\, R>0,\quad \forall\, x\in I\!R\setminus[-R,R],\quad sg(x)\,F(x)\le 0$$

et montrer que la solution de l'équation (6.2.9) est encore dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$. L'estimation de sa norme dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ dépend alors de R et de la norme de la donnée initiale. En revanche, on ne sait pas si l'hypothèse "F décroissante" est optimale pour obtenir l'unicité de la solution. $\diamondsuit$

REMARQUE 6.2.2 — On peut remplacer la condition aux limites $a(t,M)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\alpha\,\rho$ par la condition physiquement plus réaliste $a(t,M)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = H(\rho)$ où H est telle que

$$\exists\, R>0,\quad \forall\, x\in I\!R\setminus[-R,R],\quad sg(x)\,H(x)\le 0.$$

On obtient encore des estimations analogues dans ce cas. $\diamondsuit$

6.2.3 — ÉQUATION AVEC LE CHAMP GÉOSTROPHIQUE

D'ici la fin de cette section, on aura entièrement prouvé le théorème 6.2.1. On rappelle que l'on étudie le problème

$$(M9)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ \rho|_{\,t=0} = \rho^0,\quad \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0,\quad a(t,M)\,\partial_z\,\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\,\Gamma_s} \end{cases}$$

et que les hypothèses sont (H.6.2) (F continue et sous linéaire), (H.6.6) (F décroissante et $sg(x)\,F(x)\le 0$), (H.6.7) (a majorée et minorée par $\nu>0$), (H.6.8) ($\rho^0\in L^\infty(\Omega)$) et (H.6.9) ($p_s\in L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))$ est fixé).

On dit que

$$\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$$

est une solution de $(M9)$ si (6.2.2) est satisfait pour tout $\hat{\rho} \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et pour $t \in [0,\mathcal{T}]$ (*cf.* l'énoncé du théorème 6.2.1).

On commence par remarquer que

$$\text{(6.2.16)} \qquad \begin{cases} \quad \forall\,(p_s,\rho) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \\ a) \quad \vec{U}_g\,(p_s,\rho) \in L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega), \\ b) \quad div\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho) = div_c\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho) = 0 \\ c) \quad \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\,\vec{k}\,|_{\Gamma_s} = 0. \end{cases}$$

L'égalité $(6.2.16, c)$ a lieu car la troisième composante de $\vec{U}_g\,(p_s,\rho)$ est nulle. Par conséquent, le champ géostrophique vérifie l'hypothèse (H.6.10) de la section précédente. Cela étant, le terme de transport qui en résulte dans le problème $(M9)$ est cette fois-ci non linéaire. On ne peut pas appliquer directement le théorème 6.2.2 qui montre cependant clairement le rôle des hypothèses sur F et sur la donnée initiale.

On montre le théorème 6.2.1 en raisonnant en quatre temps.

i) Régularisation du terme de transport par un transport tronqué.
ii) Obtention d'une borne L^∞ pour les solutions du problème avec le transport tronqué et existence d'une solution à $(M9)$.
iii) Démonstration de l'unicité.
iv) L'application $p_s \to \rho_a(p_s)$ est lipschitzienne.

i) **Régularisation**. On commence par approcher le terme de transport par un terme de transport tronqué comme dans l'étude des équations primitives (*cf.* chapitre 2). Dans toute la suite $p_s \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$ est fixé. Soient $j \in \mathbb{R}^\star_+$, $(\rho,\psi) \in [L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))]^2$. On pose pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$\text{(6.2.17)} \qquad \int_0^t < B_j(p_s,\rho),\psi > \stackrel{def}{=} -\int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho)\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho).\nabla\psi.$$

En raisonnant comme dans la preuve du lemme 2.3.2 (*cf.* section 2.3.4, §2.3, chapitre 2) on sait que

$$\forall\,\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \quad < B_j(p_s,\rho),\rho >= 0$$

(voir aussi le lemme 6.2.2 plus loin avec $H = Id$). Les autres propriétés de ce transport tronqué utiles par la suite sont résumées dans l'énoncé suivant.

LEMME 6.2.1 — **a) Consistance de la définition**. *La formule* (6.2.17) *définit une application encore notée* $B_j(p_s,.)$

$$B_j(p_s,.)\ :\quad \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))'), \\ \qquad\qquad\qquad \rho \longrightarrow B_j(p_s,\rho), \end{cases}$$

telle que pour tout $\rho \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$

$$(6.2.18)\qquad \begin{cases} ||B_j(p_s,\rho)||_{L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')} \leq 2\,j\,C_H\,||\,\rho||_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))} + \\ 2\ j\,\sqrt{C_H}\,||\,p_s||_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))}. \end{cases}$$

b) Passage à la limite. *Soit* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente dans* $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ *faible vers* ρ *et p.p dans* $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$. *Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} B_j(p_s,\rho_n) = B_j(p_s,\rho)$$

dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$ *faible étoile.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — *a) Consistance*. On rappelle d'abord que les coordonnées du champ géostrophique sont définies par

$$U_g(p_s,\rho) = -\,(M(\partial_y\rho)+\partial_y p_s),\quad V_g(p_s,\rho) = M(\partial_x\rho)+\partial_x p_s.$$

On prouve (6.2.18). Soit $\psi \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$. Puisque $|\beta_j(\rho)| \leq j$,

$$(6.2.19)\qquad \begin{cases} \left|\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} < B_j(p_s,\rho),\psi >\right| \leq \\ j\left(\left|\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega U_g(p_s,\rho)\,\partial_x\psi\right| + \left|\displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega V_g(p_s,\rho)\,\partial_y\psi\right|\right). \end{cases}$$

On considère le premier terme du second membre de (6.2.19). D'après la définition du champ géostrophique,

$$\left|\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega U_g(p_s,\rho)\,\partial_x\psi\right| \leq \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega (|M(\partial_y\rho)|+|\partial_y p_s|)\,|\partial_x\psi|.$$

En utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.4.18) du lemme 2.4.2 (*cf.* section 2.4.2, §2.4, chapitre 2), on obtient

$$\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega |M(\partial_y\rho)|\,|\partial_x\psi|) \leq C_H\,||\partial_y\rho||_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}||\partial_x\psi||_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

Par ailleurs

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_x \psi|\, |\partial_y p_s| \leq ||\partial_x \psi||_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \sqrt{\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_y p_s|^2}.$$

Comme p_s ne dépend que de (x, y)

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_y p_s|^2 = \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_s} \int_{-H}^0 |\partial_y p_s|^2 \leq C_H \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_s} |\partial_y p_s|^2.$$

On déduit $(6.2.18)$ de cette série d'inégalité et en traitant l'autre morceau du membre de droite de $(6.2.19)$ de la même manière.

b) Passage à la limite. Soient $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ convergente vers ρ p.p et dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible, $\psi \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et $t \in [0,\mathcal{T}]$. On étudie la convergence lorsque n tend vers l'infini de

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^t < B_j(p_s,\rho_n), \psi >= \\ \displaystyle -\int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho_n)\, [(\partial_x p_s + M(\partial_x \rho_n))\, \partial_y \psi - (\partial_y p_s + M(\partial_y \rho_n))\, \partial_x \psi]. \end{array} \right.$$

On considère les termes intervenant dans l'expression précédente les uns après les autres. Comme $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ρ p.p

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho_n)\, \partial_y p_s\, \partial_x \psi = \int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho)\, \partial_y p_s\, \partial_x \psi$$

grâce au théorème de Lebesgue et au fait que β_j soit bornée et continue.
Comme M est linéaire continu de $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ dans lui-même, $(M(\partial_y \rho_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $M(\partial_y \rho)$ dans $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ faible. Par ailleurs, la convergence p.p de $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ρ, la continuité et la bornitude de β_j et $\partial_x \psi \in L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ entraînent que

$$\lim_{n\to\infty} \beta_j(\rho_n)\, \partial_x \psi = \beta_j(\rho)\, \partial_x \psi$$

dans $L^2([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ fort. Il en résulte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho_n)\, M(\partial_y \rho_n)\, \partial_x \psi = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_\Omega \beta_j(\rho)\, M(\partial_y \rho)\, \partial_x \psi.$$

Une analyse identique a lieu pour les autres termes et par conséquent pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t < B_j(p_s,\rho_n), \psi >= \int_0^t < B_j(p_s,\rho), \psi >$$

d'où le résultat du lemme 6.2.1. $\diamondsuit$

Soit le problème

$$(M10) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + B_j(p_s,\rho) - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z \rho) = F(\rho), \\ \rho|_{\,t=0} = \rho^0, \quad \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad a(t,M)\,\partial_z\,\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\,\Gamma_s}. \end{cases}$$

Grâce au lemme 6.2.1 combiné aux hypothèses (H.6.2), (H.6.7), (H.6.8) et (H.6.9), le problème $(M10)$ possède une solution faible $\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ telle que pour tout $\hat\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ et pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$(6.2.20) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^t < \partial_t\rho, \hat\rho > - \int_0^t < B_j(p_s,\rho), \hat\rho > + \mathcal{K}_h \int_0^t \int_\Omega \nabla\rho.\nabla\hat\rho + \\ \displaystyle\alpha \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho\,\hat\rho + \int_0^t \int_\Omega a(t,M)\,\partial_z\rho\,\partial_z\hat\rho = \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\,\hat\rho. \end{cases}$$

ii) **Estimation** L^∞ **dans** $(M10)$. On montre que toute solution ρ du problème $(M10)$ est dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ et satisfait

$$||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

Mais avant, étudions la conséquence essentielle de cette estimation L^∞.

En choisissant j tel que

$$||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} < j$$

on déduit que

$\beta_j(\rho) = \rho$ p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$.

Par conséquent

$$\begin{cases} \forall\,\hat\rho \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \quad \forall\, t\in[0,\mathcal{T}], \\ \displaystyle\int_0^t < B_j(p_s,\rho), \hat\rho > = -\int_0^t \int_\Omega \rho\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\hat\rho \end{cases}$$

de sorte que

lorsque j est assez grand, toute solution du problème $(M10)$ est aussi une solution du problème $(M9)$

ÃĐ

ce qui assure l'existence d'une solution au problème $(M9)$ *i.e.* la première partie du point 1) de l'énoncé du théorème 6.2.1.

Pour que le point 1) du théorème 6.2.1 soit entièrement acquis, il reste donc à obtenir l'estimation L^∞ pour ρ. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 6.2.2, on choisit $\beta_q(\rho)|\beta_q(\rho)|^{p-2}$ comme fonction test dans $(6.2.20)$. La seule difficulté nouvelle par rapport à la preuve de ce théorème consiste à montrer que la contribution des termes de transport est nulle.

LEMME 6.2.2 — *Soit H une fonction continue bornée dérivable sur $I\!R$ sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable. Alors,*

$$\forall\, \rho \in H^1_{f,l}(\Omega), \quad < B_j(p_s, \rho), H(\rho) >= 0. \qquad \diamondsuit$$

L'obtention de la borne L^∞ pour toute solution de $(M10)$ se déduit du lemme 6.2.2 et du raisonnement effectué dans la démonstration du théorème 6.2.2 plus haut.

DÉMONSTRATION — Par définition

$$< B_j(p_s, \rho), H(\rho) >= -\int_\Omega \beta_j(\rho) \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) . \nabla H(\rho).$$

L'hypothèse faite sur H justifie les intégrations par parties qui suivent. En utilisant (6.2.16) (en particulier l'incompressibilité du champ géostrophique) et les conditions aux limites sur ρ, on obtient

$$< B_j(p_s, \rho), H(\rho) >= \int_\Omega H(\rho) \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) . \nabla(\beta_j(\rho)).$$

Comme $\nabla(\beta_j(\rho)) = 0$ là où $|\rho| \geq j$,

$$< B_j(p_s, \rho), H(\rho) >= \int_\Omega H(\beta_j(\rho)) \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) . \nabla(\beta_j(\rho)).$$

Soit $\tilde{H}$ la primitive de H nulle en zéro. Alors,

$$< B_j(p_s, \rho), H(\rho) >= \int_\Omega \overrightarrow{U}_g (p_s, \rho) . \nabla(\tilde{H}(\beta_j(\rho))).$$

Une nouvelle intégration par parties utilisant $(6.2.16)$ montre que cette quantité est nulle. $\diamondsuit$

iii) **Unicité**. On sait maintenant que lorsque les hypothèses (H.6.2), (H.6.6), (H.6.7), (H.6.8) et (H.6.9) sont vérifiées, le problème $(M9)$ a une solution ρ dans l'espace $L^2([0, \mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \cap L^\infty([0, \mathcal{T}] \times \Omega)$ et que toute solution ρ du problème $(M9)$

satisfait l'estimation uniforme $||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}$. On suppose en plus maintenant

$$\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)} \left(2\,C_H + \frac{1}{2}\right) \tag{6.2.3}$$

et on montre que dans ce cas la solution est unique *i.e.* la première partie du point 2) du théorème 6.2.1.

Soient ρ_1 et ρ_2 deux solutions du problème $(M9)$,

$$\delta = \rho_1 - \rho_2$$

qui vérifie

$$\begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t\delta - \mathcal{K}_h\Delta\delta - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\delta) + \\ \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1)\,.\nabla\rho_1 - \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_2)\,.\nabla\rho_2 = F(\rho_1) - F(\rho_2), \end{cases} \\ (b) & \delta|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad a(t,M)\,\partial_z\delta|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\delta, \quad \delta|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.2.21}$$

On écrit

$$\begin{cases} \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1)\,.\nabla\rho_1 - \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_2)\,.\nabla\rho_2 = \\ \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1)\,.\nabla\delta + (\overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1) - \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_2))\,.\nabla\rho_2 \end{cases}$$

puis on choisit δ comme fonction test dans $(6.2.21, a)$. On intègre par parties en utilisant $(6.2.16)$ et directement la décroissance de F (H.6.6). Il vient

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega \delta^2 + \alpha\int_{\Gamma_s}\delta^2 + \mathcal{K}_h\int_\Omega|\nabla\delta|^2 + \int_\Omega a(t,M)\,|\partial_z\delta|^2 - I_\delta \leq 0 \tag{6.2.22}$$

où l'on a posé

$$I_\delta = \int_\Omega \rho_2\,(\overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1) - \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_2))\,.\nabla\delta.$$

Or, la définition du champ géostrophique implique

$$\overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_1) - \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho_2) = -M(\partial_y\delta)\,\overrightarrow{e}_1 + M(\partial_x\delta)\,\overrightarrow{e}_2\;.$$

En utilisant simultanément

- — l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
- — l'estimation $(2.4.18)$ sur l'opérateur M obtenue dans le lemme 2.4.2 (*cf.* section 2.4.2),
- — la borne L^∞ uniforme vérifiée à la fois par ρ_1 et ρ_2,

on obtient

$$|\,I_\delta| \leq 2\,C_H\;||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla\delta|^2. \tag{6.2.23}$$

On reporte $(6.2.23)$ dans $(6.2.22)$ de sorte que

$$\frac{d}{2dt}\int_\Omega\delta^2 + (\mathcal{K}_h - 2\;C_H\,||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)})\int_\Omega|\nabla\delta|^2 \leq 0$$

d'où $\delta = 0$ car

— on a supposé que $(6.2.3)$ a lieu et donc en particulier on a l'inégalité
$\mathcal{K}_h - 2\, C_H\, ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)} > 0$,

— $\delta|_{\,t=0} = 0$,

ce qui montre l'unicité de la solution du problème $(M9)$ notée $\rho_a(p_s)$ dans toute la suite. $\diamondsuit$

iv) ρ_a **Lipschitzienne**. Pour conclure le point 2) du théorème 6.2.1 il reste à montrer que l'application

$$\left\{\begin{array}{c} L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \\ p_s \longrightarrow \rho_a(p_s) \end{array}\right.$$

est κ lipschitzienne où κ est déterminée par

$$\kappa^2 \stackrel{def}{=} \frac{||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\, C_H}{2\, inf(\nu, (\mathcal{K}_h - \,||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}(2\, C_H + 1/2)))}. \tag{6.2.5}$$

On suppose que $(6.2.3)$ a lieu de sorte que la définition $(6.2.5)$ ait un sens.

Soit $(p_s^1, p_s^2) \in [L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))]^2$ et posons

$$\rho_i = \rho_a(p_s^i), \quad \delta = \rho_a(p_s^1) - \rho_a(p_s^2) = \rho_1 - \rho_2.$$

La fonction δ vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} (a) & \left\{\begin{array}{l} \partial_t\delta - \mathcal{K}_h\Delta\delta - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\delta) + \\ \overrightarrow{U}_g\,(p_s^1,\rho_1)\,.\nabla\rho_1 - \overrightarrow{U}_g\,(p_s^2,\rho_2)\,.\nabla\rho_2 = F(\rho_1) - F(\rho_2), \end{array}\right. \\ (b) & \delta|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad a(t,M)\,\partial_z\delta|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\delta, \quad \delta|_{\,t=0} = 0. \end{array}\right.$$

On choisit δ comme fonction test dans cette équation puis on intègre par parties. On utilise simultanément la décroissance de F et $a(t,M) \geq \nu$. On a alors

$$\frac{d}{2\,dt}\int_\Omega \delta^2 + \alpha\int_{\Gamma_s}\delta^2 + \mathcal{K}_h\int_\Omega |\nabla\delta|^2 + \nu\int_\Omega |\partial_z\delta|^2 - J_\delta \leq 0 \tag{6.2.24}$$

avec

$$J_\delta = \int_\Omega \rho_2\,(\overrightarrow{U}_g\,(p_s^1,\rho_1) - \overrightarrow{U}_g\,(p_s^2,\rho_2))\,.\nabla\delta.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} \quad \overrightarrow{U}_g\,(p_s^1,\rho_1) - \overrightarrow{U}_g\,(p_s^2,\rho_2) = \\ -\,(M(\partial_y\delta) + \partial_y(p_s^1 - p_s^2))\,\overrightarrow{e}_1 + (M(\partial_x\delta) + \partial_x(p_s^1 - p_s^2))\,\overrightarrow{e}_1 \end{array}\right.$$

En raisonnant comme dans le point précédent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} |\, J_\delta| \leq 2\; C_H\, ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla \delta|^2 + \\ \displaystyle ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_y \delta|\, |\partial_x (p_s^1 - p_s^2)| + |\partial_x \delta|\, |\partial_y (p_s^1 - p_s^2)| \end{array} \right.$$

soit, en utilisant l'inégalité de Young et le fait que p_s^i ne dépend que de (x, y),

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}} |\, J_\delta| \leq ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\, (2\, C_H + 1/2) \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla \delta|^2 + \\ \displaystyle \frac{||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\, C_H}{2}\, ||\, p_s^1 - p_s^2\, ||^2_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))}. \end{array} \right.$$

On reporte cette inégalité dans $(6.2.24)$ après l'avoir intégrée par rapport au temps sur $[0, \mathcal{T}]$ en tenant compte du fait que $\delta_{t=0} = 0$. On obtient en particulier

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \alpha \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_s} \delta^2 + (\mathcal{K}_h - \, ||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)} (2\, C_H + 1/2)) \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla \delta|^2 + \\ \displaystyle \nu \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_z \delta|^2 \leq \frac{||\, \rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\, C_H}{2}\, ||\, p_s^1 - p_s^2\, ||^2_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))}, \end{array} \right.$$

Donc, comme $\alpha \geq \nu$ et $\kappa > 0$ est définie par $(6.2.5)$, on a

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\Gamma_s} \delta^2 + \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\nabla \delta|^2 + \int_0^{\mathcal{T}} \int_\Omega |\partial_z \delta|^2 \leq \kappa^2\, ||\, p_s^1 - p_s^2\, ||^2_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))}.$$

En d'autres termes

$$||\rho_a(p_s^1) - \rho_a(p_s^2)||_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))} \leq \kappa\, ||p_s^1 - p_s^2||_{L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))}$$

qui montre bien que l'application ρ_a est κ Lipschitzienne.

Enfin la solution ρ satisfait l'égalité d'énergie pour p_s fixé car on peut choisir ρ comme fonction test dans $(6.2.2)$, ce qui achève entièrement la démonstration du théorème 6.2.1. $\diamondsuit$

REMARQUE 6.2.3 — L'analogue des remarques 6.2.1 et 6.2.2 ont lieu pour le problème $(M9)$. $\diamondsuit$

Nous venons de franchir une étape importante pour l'analyse du système $(M6)$. Nous sommes maintenant en mesure de pouvoir coupler l'équation pour ρ avec celle pour p_s et la vitesse barotrope.

6. 3 — ANALYSE DU SYSTÈME GÉOSTROPHICO-BAROTROPE

6.3.1 — ORIENTATION

La démonstration du résultat d'existence d'une solution au système géostrophico-barotrope turbulent $(M6)$ sera complète à la fin de ce paragraphe (*cf.* théorème 6.3.3). On applique d'abord le résultat du théorème 6.2.1 à l'étude du système géostrophico-barotrope non turbulent

$$
(M11) \qquad \begin{cases}
(a) & \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot \underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\
(b) & div \underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\
(c) & \begin{cases} \partial_t \rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = \\ F(\rho) \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \end{cases} \\
(d) & rot \underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\ |_{\partial\Gamma_s} = 0, \\
(e) & a(t,M)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\Gamma_s}, \quad \rho|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \\
(f) & (\underline{\vec{v}},\rho)|_{t=0} = (\underline{\vec{v}}_0,\rho^0),
\end{cases}
$$

où l'on rappelle que

$$
M(f) = \int_z^0 f\,dz', \quad \mathcal{M}(f) = \frac{1}{H(x,y)} \int_{-H(x,y)}^0 f\,dz'.
$$

L'existence de solutions à $(M11)$ et la description de l'ensemble qu'elles constituent est la deuxième grande étape de l'analyse de $(M6)$. Le système $(M11)$ couple les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles incompressibles à une équation parabolique, les termes de couplages étant

— le transport géostrophique dans $(M11,c)$,
— le terme de pression $p_s + \mathcal{M}(M(\rho))$ dans $(M11,a)$.

On a décrit dans le paragraphe précédent la structure du terme de transport géostrophique. On doit maintenant comprendre celle du terme de pression qui intervient dans les équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles, dont le rappel des propriétés principales est nécessaire lorsqu'elles ne sont pas couplées à l'équation pour ρ. Par ailleurs, une étude détaillée de l'opérateur $\mathcal{M} \circ M$ est indispensable à la compréhension de $(M11)$ dont l'analyse est articulée en trois temps, chacun constituant une section.

- Rappels sur les équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles.
- Étude de l'opérateur de moyenne $\mathcal{M} \circ M$ et conséquences directes.
- Démonstration de l'existence d'une solution à $(M11)$ et description de l'ensemble des solutions.

À l'issue de cette étape, on est capable dans la dernière section de ce paragraphe de prouver l'existence d'une solution à $(M6)$. On utilise pour cela une méthode de temps de retard batie à partir de $(M11)$ pour construire des approximations et un passage à la limite dans les équations.

6.3.2 — RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES BIDIMENSIONNELLES

On considère dans cette section le problème posé dans $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$

$$(6.3.1) \qquad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \nabla P = \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}}, \\ div\underline{\vec{v}} = 0, \\ rot\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}} \,.\, \vec{n}\ |_{\partial\Gamma_s} = 0, \quad \underline{\vec{v}}|_{t=0} = \underline{\vec{v}}_0. \end{cases}$$

Ce problème est classique et il y a beaucoup de résultats connus à son propos (*cf.* LIONS ÃĐ[1], TEMAM [1]). On se limite ici au rappel succinct de l'existence d'une solution unique et régulière qui est ce dont on a besoin, en particulier pour la pression. Le fait que ce problème soit posé en dimension 2 “aide" beaucoup.

Dans cette section on

i) définit l'espace fonctionnel dans lequel chercher $\underline{\vec{v}}$ puis on donne une forme variationnelle à $(6.3.1)$,
ii) énonce un résultat d'existence, d'unicité et de régularité.

i) *Espace fonctionnel pour* $(6.3.1)$. Soit l'espace de Hilbert

$$Z \overset{def}{=} \Big\{\vec{u} \in [L^2(\Gamma_s)]^2\,;\ rot\,\vec{u} \in L^2(\Gamma_s)\,;\ div\vec{u} = 0\,;\ \vec{u}\,.\,\vec{n}\ |_{\partial\Gamma_s} = rot\,\vec{u}\ |_{\partial\Gamma_s} = 0\Big\}$$

muni du produit scalaire

$$<\vec{u}_1, \vec{u}_2> \overset{def}{=} \int_{\Gamma_s} rot\,\vec{u}_1\,.\,rot\,\vec{u}_2\ +\ \vec{u}_1\,.\,\vec{u}_2\ .$$

On rappelle que pour $\vec{u} = u_x\,\vec{e}_1 + u_y\,\vec{e}_2$ et f définis sur Γ_s

$$rot\,\vec{u} = \partial_x u_y - \partial_y u_x, \quad Rot(f) = (\partial_y f)\,\vec{e}_1 - (\partial_x f)\,\vec{e}_2\ .$$

On note enfin que pour tout $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in Z$

$$\int_{\Gamma_s} Rot\,(rot\,\vec{u}_1)\,.\,\vec{u}_2 = \int_{\Gamma_s} rot\,\vec{u}_1\,.\,rot\,\vec{u}_2$$

qui résulte d'une intégration par parties.

La formulation faible du problème $(6.3.1)$ consiste à trouver $\underline{\vec{v}} \in L^2([0,\mathcal{T}], Z)$ tel que pour tout $\vec{u} \in L^2([0,\mathcal{T}], Z)$ et pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t < \partial_t \underline{\vec{v}}, \vec{u} > + \int_0^t \int_{\Gamma_s} (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}}.\,\vec{u} + K_b \int_0^t \int_{\Gamma_s} rot \underline{\vec{v}}.\,rot\,\vec{u}\; + \\ \displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_s} \vec{k} \times \underline{\vec{v}}.\,\vec{u} = \int_0^t \int_{\Gamma_s} \frac{1}{H(x,y)}\;\vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{u}\;. \end{cases}$$

Comme les tests utilisés sont à divergence nulle, la pression n'apparaît pas. Le théorème de De Rham permet de la traiter à partir de cette formulation variationnelle. Le résultat d'existence énoncé par la suite a lieu au sens des distributions incluant directement la pression dont la régularité s'obtient à l'aide des estimations de NECAS ÃĐ[1] (*cf.* aussi AMROUCHE-GIRAULT [1]).

ii) *Existence, unicité et régularité.* Les résultats d'unicité et de régularité pour le problème $(6.3.1)$ dépendent

— de la donnée initiale $\underline{\vec{v}}_0$,
— du second membre $(1/H(x,y))\;\vec{\mathrm{v}}$.

Soit

$$m_H = Inf\{H(x,y),\,(x,y) \in \Gamma_s\}.$$

Depuis le début de ce livre $m_H > 0$ et $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$. Soit

(H.6.11) $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$, $m_H > 0$.

On impose par ailleurs

(H.6.12) $\underline{\vec{v}}_0 \in Z \cap H^2(\Gamma_s)$, $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$.ÃĐ

Soit enfin $H^1_m(\Gamma_s)$ l'espace des fonctions dans $H^1(\Gamma_s)$ à moyenne nulle.

THÉORÈME 6.3.1 — *On suppose que* (H.6.11) *et* (H.6.12) *ont lieu. Alors, le problème* $(6.3.3)$ *possède une unique solution*

$$(\underline{\vec{v}}, P_0) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], Z) \cap L^2([0,\mathcal{T}], H^1_m(\Gamma_s))$$

au sens des distributions dans $[0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s$. *Toute solution du problème* $(6.3.1)$ *est de la forme* $(\underline{\vec{v}}, P_0 + p)$, $p \in I\!R$. ♢

Ce résultat est démontré dans LIONS ÃĐ[1] et dans TEMAMÃĐ [1].

REMARQUE 6.3.1 — Il est possible de retrouver de manière élégante les résultats de régularité concernant $(6.3.1)$ à partir de l'équation $(3.3.20)$ satisfaite par la vorticité barotrope (*cf.* remarque 3.3.3, section 3.3.4). $\diamondsuit$

6.3.3 — OPÉRATEUR DE MOYENNE ET COMPOSITION AVEC L'APPLICATION ρ_aÃĐ

On met en place dans cette section le processus qui met en évidence pourquoi on dit que p_s est solution d'un problème de point fixe. Ce point sera entièrement clair d'ici la fin de la section suivante. On introduit et étudie d'abord les opérateurs agissant sur p_s et intervenant dans le problème $(M11)$.

On se place dans les conditions d'application du théorème 6.2.1 de sorte que

l'application $p_s \to \rho_a(p_s)$ soit bien définie et lipschitzienne

où $\rho_a(p_s)$ est l'unique solution de l'équation pour ρ lorsque p_s est donnée.

LEMME 6.3.1 —*On suppose que* (H.6.2)*,* (H.6.6)*,* (H.6.7) *et* (H.6.8) *sont vérifiées et que* $(6.2.3)$ *a lieu. Alors* $(M11)$ *est équivalent à*

$$(M12)\quad \begin{cases} (a) \quad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho_a(p_s))) = \dfrac{1}{H(x,y)} \vec{\mathrm{v}} \quad \textit{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ (b) \quad div\underline{\vec{v}} = 0 \quad \textit{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\ (c) \quad rot\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\;|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (f) \quad \underline{\vec{v}}|_{t=0} = \underline{\vec{v}}_0, \end{cases}$$

avec $\underline{\vec{v}}$ *et* p_s *pour inconnues.* $\diamondsuit$

Cet énoncé est un corollaire immédiat du théorème 6.2.1.

Dans le problème $(M12)$ apparaît

$$(6.3.2) \qquad \mathcal{N}: \quad \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)), \\ \rho \longrightarrow \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 \rho\, dz' \right) dz \end{cases}$$

qui est l'opérateur de moyenne étudié dans la suite de cette section et dont la continuité dépend de H.

LEMME 6.3.2 — *On suppose* (H.6.11) *vérifiée. L'opérateur* $\mathcal{N}$ *est linéaire continu de* $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ *dans* $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$. *Sa norme* q *ne dépend que de* C_H, m_H *et* $||\nabla H||_{L^\infty(\Omega)}$. ♢

DÉMONSTRATION — On rappelle que $C_H = sup\{H(x,y), (x,y) \in \Gamma_s\}$. Soit $\rho \in H^1(\Omega)$. On commence par estimer $||\partial_x \mathcal{N}(\rho)||_{L^2(\Gamma_s)}$. On pose

$$f(x,y,z) = M(\rho)(x,y,z), \quad F(x,y,z) = M(f)(x,y,z),$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{N}(\rho)(x,y) = (1/H(x,y))\, F(x,y,-H(x,y)).$$

Par conséquent

$$\partial_x \mathcal{N}(\rho) = \frac{H\,(\partial_x F(x,y,-H) - (\partial_x H)\,\partial_z F(x,y,-H))\, - (\partial_x H)\,F(x,y,-H)}{H^2(x,y)}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} ||\partial_x \mathcal{N}(\rho)||_{L^2(\Gamma_s)} \leq \dfrac{C_H}{m_h^2}\, ||\partial_x F(x,y,-H)||_{L^2(\Gamma_s)} + \\ \dfrac{||\partial_x H||_{L^\infty(\Omega)}}{m_h^2}\, [C_H\, ||\partial_z F(x,y,-H)||_{L^2(\Gamma_s)} + ||F(x,y,-H)||_{L^2(\Gamma_s)}]. \end{cases}$$

On traite chaque terme de cette inégalité l'un après l'autre. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.4.18) dans le lemme 2.4.1, il vient

$$||\partial_x F(x,y,-H)||^2_{L^2(\Gamma_s)} = \int_{\Gamma_s} \left(\int_H^0 (\partial_x f)^2 \right) \leq C_H \int_\Omega (\partial_x f)^2 \leq C_H^3 ||\partial_x \rho||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$||F(x,y,-H)||^2_{L^2(\Gamma_s)} \leq\, C_H^3\, ||\,\rho||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Enfin, puisque $\partial_z F = f$

$$||\partial_z F(x,y,-H)||_{L^2(\Gamma_s)} \leq\, C_H\, ||\,\rho||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Il en résulte que

$$||\partial_x \mathcal{N}(\rho)||_{L^2(\Gamma_s)} \leq \frac{C_H^{\frac{3}{2}}}{m_H^2}(C_H + ||\partial_x H||_{L^\infty(\Omega)}(1 + \sqrt{C_H})).$$

On estime de la même manière $||\partial_y \mathcal{N}(\rho)||_{L^2(\Gamma_s)}$ et $||\mathcal{N}(\rho)||_{L^2(\Gamma_s)}$. ♢

RÉCAPITULATION ET CONSÉQUENCES

Une mise au point générale est maintenant nécessaire pour fixer les bases de la compréhension du couplage dans les termes de pression. ÃĐ

1) On rappelle que $\mathcal{K}_h \geq \nu$ et $\alpha \geq \nu$. En faisant les hypothèses

(H.6.2) F continue et sous linéaire,

(H.6.6) F décroissante et $sg(x)\,F(x) \leq 0$,

(H.6.7) a majorée et minorée par $\nu > 0$,

(H.6.8) $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$,

(H.6.13) $\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\,\big(2\,C_H + \frac{1}{2}\big)$,ÃĐ

le théorème 6.2.1 s'applique. Pour tout $p_s \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ le problème $(M9)$

$$(M9) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = F(\rho), \\ \rho|_{\,t=0} = \rho^0, \quad \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad a(t,M)\,\partial_z\,\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\,\Gamma_s} \end{cases}$$

admet une unique solution $\rho_a(p_s) \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$, l'application

$$p_s \to \rho_a(p_s)$$

est κ lipschitzienne et

$$\lim_{\nu\to+\infty} \kappa = 0, \qquad \lim_{||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\to 0} \kappa = 0.$$

2) On suppose de plus que

(H.6.11) $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$, $m_H > 0$

a lieu pour pouvoir appliquer le lemme 6.3.2. Le problème $(M12)$ met en évidence l'application

$$\gamma_a: \quad \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)), \\ p_s \longrightarrow \mathcal{N}(\rho_a(p_s)) = \dfrac{1}{H(x,y)} \displaystyle\int_{-H(x,y)}^0 \left(\int_z^0 \rho_a(p_s)\,dz'\right) dz \end{cases}$$

où $a(t,M)$ est fixée et vérifie (H.6.7). On a

$$\gamma_a = \mathcal{N} \circ \rho_a,$$

de sorte que puisque $\mathcal{N}$ est linéaire continu

- *l'application γ_a est $q\,\kappa$ lipschitzienne.*

Comme la norme q de $\mathcal{N}$ ne dépend que de H

$$\lim_{\nu\to+\infty} (q\,\kappa) = 0, \qquad \lim_{||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\to 0} (q\,\kappa) = 0.$$

On considère l'ensemble

$$(6.3.3) \qquad A \overset{def}{=} \{(\nu,\rho^0) \in I\!R^+ \times L^\infty(\Omega)\,;\; 0 < q\,\kappa < 1\}.$$

Grâce à ce qui précède, on sait que A est non vide.

- *Dire que* $(\nu, \rho^0) \in A$ *revient à dire que "*ν *est grand" ou que "*$||\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}$ *est petit".*ÃĐ

À partir de maintenant, on suppose que

(H.6.14) $(\nu, \rho^0) \in A$

de sorte que l'application γ_a soit *contractante*. Remarquons que cet ensemble A ne dépend absolument pas du choix de la viscosité $a(t, M)$ tant que celle-ci est majorée et surtout minorée par ν.

3) *Quel est le lien avec les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles de la section précédente ?*
Outre les hypothèses déjà rappelées, on suppose

(H.6.12) $\underline{\vec{v}}_0 \in Z \cap H^2(\Gamma_s)$, $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$,

pour pouvoir appliquer le théorème 6.3.1. Supposons qu'il existe

$$(\underline{\vec{v}}, p_s) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], Z) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$$

qui soit une solution de

$$(M12) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \gamma_a(p_s)) = \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ (b) & div\underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\ (c) & rot\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (f) & \underline{\vec{v}}|_{t=0} = \underline{\vec{v}}_0 \end{cases}$$

où

$$\gamma_a = \mathcal{M} \circ M \circ \rho_a = \mathcal{N} \circ \rho_a.$$

Alors, $(\underline{\vec{v}}, p_s + \gamma_a(p_s))$ est une solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

$$(6.3.1) \qquad \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \nabla P = \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}}, \\ div\underline{\vec{v}} = 0, \\ rot\underline{\vec{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\vec{v}}\,.\,\vec{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \quad \underline{\vec{v}}|_{t=0} = \underline{\vec{v}}_0, \end{cases}$$

avec

$$P = p_s + \gamma_a(p_s).$$

Grâce au résultat du théorème 6.3.1 on peut affirmer qu'il existe $p \in I\!R$ tel que

$$P = P_0 + p = p_s + \gamma_a(p_s) \stackrel{def}{=} \lambda_a(p_s) \tag{6.3.4}$$

en posant

$$\lambda_a = Id + \gamma_a.$$

Dans ce qui précède, $P_0 \in L^2([0,\mathcal{T}], H^1_m(\Gamma_s))$ est la pression de référence. Elle ne dépend que de $\overrightarrow{\mathrm{v}}$, de la topographie H et de la donnée initiale $\overrightarrow{\underline{v}}_0$. Elle est maintenant fixée une bonne fois pour toutes.

Réciproquement, soient $(\overrightarrow{\underline{v}}, P_0 + p)$ une solution de $(6.3.1)$ et p_s une solution de $(6.3.4)$. Alors, $(\overrightarrow{\underline{v}}, p_s)$ est une solution de $(M12)$ et grâce au lemme 6.3.1 le triplet

$$(\overrightarrow{\underline{v}}, p_s, \rho_a(p_s))$$

est une solution de $(M11)$. Ce raisonnement combiné au résultat du lemme 6.3.1 montre la proposition 6.3.1.

PROPOSITION 6.3.1 — *On suppose que les hypothèses* (H.6.2), (H.6.6), (H.6.7), (H.6.8), (H.6.11), (H.6.12), (H.6.13) *et* (H.6.14) *sont satisfaites. Alors,*

$$(\overrightarrow{\underline{v}}, p_s, \rho_a(p_s)) = (\overrightarrow{\underline{v}}, p_s, \rho)$$

est une solution du système géostrophico-barotrope non turbulent $(M11)$

$$(M11) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \overrightarrow{\underline{v}} + (\overrightarrow{\underline{v}}\nabla)\overrightarrow{\underline{v}} + K_b Rot\,(rot\overrightarrow{\underline{v}}) + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{\underline{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)}\,\overrightarrow{\mathrm{v}} \quad \textit{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ (b) & div\overrightarrow{\underline{v}} = 0 \quad \textit{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Gamma_s, \\ (c) & \begin{cases} \partial_t \rho + \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h \Delta\rho - \partial_z(a(t,M)\,\partial_z\rho) = \\ F(\rho) \quad \textit{dans } [0,\mathcal{T}] \times \Omega, \end{cases} \\ (d) & rot\overrightarrow{\underline{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \overrightarrow{\underline{v}}\,.\,\overrightarrow{n}\,|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (e) & a(t,M)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\Gamma_s}, \quad \rho|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \\ (f) & (\overrightarrow{\underline{v}}, \rho)|_{t=0} = (\overrightarrow{\underline{v}}_0, \rho^0) \end{cases}$$

si et seulement s'il existe $p \in I\!R$ *tel que* (p_s, p) *soit une solution de l'équation*

$$P = P_0 + p = \lambda_a(p_s) \tag{6.3.4}$$

où $(\overrightarrow{\underline{v}}, P_0) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], Z) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_m(\Gamma_s))$ *est la solution de* (6.3.1). ◇ÃÐ

Le système $(M11)$ est entièrement condensé dans l'équation $(6.3.4)$ qui est désormais l'équation à résoudre. Pour cela *il est nécessaire que λ_a soit inversible.*

Il faut insister sur le fait que le résultat d'unicité du théorème 6.2.1 est crucial dans ce raisonnement.

6.3.4 — SYSTÈME GÉOSTROPHICO-BAROTROPE NON TURBULENT

THÉORÈME 6.3.2 — *On suppose satisfaites les hypothèses*

(H.6.2) F *est continue sous linéaire,*

(H.6.6) F *est décroissante et* $sg(x)\,F(x) \leq 0$*,*

(H.6.7) a *est majorée par* β *et minorée par* $\nu > 0$*,*

(H.6.8) $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$*,*

(H.6.11) $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$*,* $m_H > 0$*,*

(H.6.12) $\underline{\vec{v}}_0 \in Z \cap H^2(\Gamma_s)$*,* $\vec{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$*,*

(H.6.13) $\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\left(2\,C_H + \frac{1}{2}\right)$*,*

(H.6.14) $(\nu, \rho^0) \in A = \{(\nu, \rho^0) \in I\!\!R^+ \times L^\infty(\Omega)\,;\ 0 < q\,\kappa < 1\}$*.*

1) *L'application*

$$\lambda_a : \quad \begin{cases} L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)) \longrightarrow L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)), \\ p_s \longrightarrow \lambda_a(p_s) = p_s + \gamma_a(p_s) = p_s + \mathcal{M}(M(\rho_a(p_s))) \end{cases}$$

est inversible.

2) *Le système géostrophico-barotrope* $(M11)$ *possède une solution au sens des distributions*

$$(\underline{\vec{v}}, p_s, \rho) \in L^\infty([0,\mathcal{T}], Z) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s)) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)).$$

De plus $\rho \in L^\infty([0,\mathcal{T}] \times \Omega)$ *et vérifie* $||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}$ *ainsi que l'égalité d'énergie*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega \rho^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho^0)^2 + \mathcal{K}_h \int_0^t \int_\Omega |\nabla\rho|^2 + \\ \displaystyle\int_0^t \int_\Omega a(t,M)|\partial_z\rho|^2 \ + \alpha \int_0^t \int_{\Gamma_s} \rho^2 = \int_0^t \int_\Omega F(\rho)\,\rho \end{cases}$$

vérifiée pour tout $t \in [0,\mathcal{T}]$*.*

3) *ÃĐPour toute solution* $(\underline{\vec{v}}, p_s, \rho)$ *de* $(M11)$ *il existe* $p \in I\!\!R$ *telle que*

$$\begin{cases} \rho = \rho_a(\lambda_a^{-1}(P_0 + p)), \\ p_s = \lambda_a^{-1}(P_0 + p) \end{cases} \tag{6.3.5}$$

et l'ensemble des solutions de $(M11)$ *est exactement*

$$S = \{(\underline{\vec{v}}, \lambda_a^{-1}(P_0 + p)), \rho_a(\lambda_a^{-1}(P_0 + p))\,;\, p \in I\!R\}$$

où $(\underline{\vec{v}}, P_0)$ *est l'unique solution des équations de Navier-Stokes* $(6.3.1)$ *dans l'espace* $L^\infty([0, \mathcal{T}], Z) \times L^2([0, \mathcal{T}], H_m^1(\Gamma_s))$. ♢

DÉMONSTRATION — Ce résultat est la conséquence des théorèmes 6.2.1 et 6.3.1, combinés à la proposition 6.3.1.

- Les hypothèses (H.6.2, 6, 7, 8, 11, 13) permettent de définir l'application λ_a (*cf.* théorème 6.2.1 et le lemme 6.3.2),
- les hypothèses (H.6.11,12) servent à décrire l'ensemble des solutions des équations de Navier-Stokes $(6.3.1)$ et par conséquent celles de $(M11)$, (*cf.* théorème 6.3.1 et proposition 6.3.1).

La seule chose qu'il reste à montrer est que l'application λ_a est inversible pour pouvoir résoudre l'équation $(6.3.4)$. On a vu dans la section précédente qu'en combinant le lemme 6.3.2 au théorème 6.2.1 lorsque l'hypothèse (H.6.14) est vérifiée, l'application $\gamma_a = \mathcal{M} \circ M \circ \rho_a$ est contractante. Par conséquent

> $\lambda_a = Id + \gamma_a$ est une pertubation contractante de l'identité dans l'espace $L^2([0, \mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$ qui est complet.

Il résulte du théorème de point fixe qu'elle est inversible. Voilà pourquoi on dit que

> "p_s est solution d'un problème de point fixe".

Le reste de l'énoncé est déjà démontré dans les théorèmes 6.2.1 et 6.3.1 et la proposition 6.3.1. ♢

REMARQUE 6.3.2 — Les questions suivantes sont des problèmes ouverts.
1) Quelles sont les hypothèses les plus générales que l'on peut faire sur F ?
2) Est-ce que les hypothèses $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$ et $(\nu, \rho^0) \in A$ sont indispensables ? ♢

6.3.5 — SYSTÈME GÉOSTROPHICO BAROTROPE TURBULENT

On est en mesure de franchir la dernière étape de l'analyse de $(M6)$. On rappelle que

$$(M6) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t \underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k} \times \underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s + \mathcal{M}(M(\rho)) = \dfrac{1}{H(x,y)}\ \vec{\mathrm{v}} \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases} \\ (b) & div\underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s, \end{cases}$$

$$(M6)\quad \begin{cases} (c) & \begin{cases} \partial_t \rho + \overrightarrow{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho - \mathcal{K}_h\Delta\rho - \partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho) = \\ F(\rho) \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Omega, \end{cases} \\ (d) & \begin{cases} \partial_t k - \lambda\Delta k - \partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k) = \\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2 + \mu_t(k)\,\partial_z\rho - k\sqrt{|\,k\,|} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Omega, \end{cases} \\ (e) & rot\underline{\overrightarrow{v}}|_{\partial\Gamma_s} = \underline{\overrightarrow{v}}\,.\,\overrightarrow{n}\;|_{\partial\Gamma_s} = 0, \\ (f) & (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\,\Gamma_s} = -\,\alpha\,\rho|_{\,\Gamma_s}, \quad \rho|_{\,\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \\ (g) & k|_{\,\Gamma_s} = m_b|\overrightarrow{\mathrm{v}}\,|, \quad k|_{\,\Gamma_f\cup\Gamma_l} = 0, \\ (h) & (\underline{\overrightarrow{v}},\rho,k)|_{t=0} = (\underline{\overrightarrow{v}}_0,\rho^0,k_0). \end{cases}$$

On fait les hypothèse (classées en fonction de leur apparition dans le chapitre) :

(H.6.2) F est continue sous linéaire,

(H.6.3) ν_v^t, μ_t et ν_t sont des fonctions continues, ν_v^t et μ_t sont positives et bornées, $\nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0$ et ν_t est minorée par $\nu > 0$,

(H.6.4) $\overrightarrow{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait l'hypothèse de croissance

$$\exists\, C \in (I\!R^+)^2,\;\; \exists\,\theta\in[0,2/3[\,;\,\forall\, k\in I\!R, \quad \nu_t(k) \le C(1+|\,k\,|^\theta),$$

ou bien $\overrightarrow{\mathrm{v}} \in H^{3/2}(\Gamma_s)$ et ν_t est bornée dérivable de dérivée bornée,

(H.6.6) F est décroissante et $sg(x)\,F(x) \le 0$,

(H.6.8) $\rho^0 \in L^\infty(\Omega)$,

(H.6.11) $H \in C^1(\overline{\Gamma}_s)$, $m_H > 0$,

(H.6.13) $\mathcal{K}_h > ||\,\rho^0||_{L^\infty(\Omega)}\left(2\,C_H + \frac{1}{2}\right)$,

(H.6.14) $(\nu,\rho^0) \in A = \{(\nu,\rho^0)\in I\!R^+\times L^\infty(\Omega)\,;\; 0 < q\,\kappa < 1\}$,

(H.6.15) $\underline{\overrightarrow{v}}_0 \in Z\cap H^2(\Gamma_s)$, $k_0 \ge 0$, $k_0 \in L^1(\Omega)$.

THÉORÈME 6.3.3 — *On suppose satisfaites les hypothèses* (H.6.2), (H.6.3), (H.6.4), (H.6.6), (H.6.8), (H.6.11), (H.6.13), (H.6.14) *et* (H.6.15). *Alors, le problème* $(M6)$ *possède une solution* $(\underline{\overrightarrow{v}},\rho,p_s,k)$ *telle que*

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{v}} \in L^\infty([0,\mathcal{T}],Z), \quad p_s \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s)), \\ \rho \in L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))\cap L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega), \\ ||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \le ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}, \\ k \in \displaystyle\bigcap_{1\le p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}],W^{1,p}(\Omega)), \quad k\ge 0 \text{ p.p.} \end{cases}$$

Par ailleurs, il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} p_s = \lambda_a^{-1}(P_0 + p), \\ \rho = \rho_a(\lambda_a^{-1}(P_0 + p)) \end{cases}$$

où

$$a = \mu_t(k) + \nu$$

et $(\underline{\vec{v}}, P_0)$ *est la solution de l'équation* (6.3.3) *avec* $P_0 \in L^2([0, \mathcal{T}], H_m^1(\Omega))$. *Les équations* $(M6, a, b)$ *et* $(M6, c, d)$ *sont satisfaites au sens des distributions dans* $[0, \mathcal{T}] \times \Gamma_s$ *et* $[0, \mathcal{T}] \times \Omega$ *respectivement.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — Les hypothèses du théorème 6.3.3 permettent d'utiliser directement le théorème 6.3.2 et tous les résultats du chapitre 4.

Pour simplifier la présentation on se place dans le cas homogène *i.e.* $\vec{\mathrm{v}} = 0$ et ν_t satisfait une hypothèse de croissance. Grâce aux résultats du §4.3 on sait comment en déduire les résultats dans le cas non homogène. Enfin, puisque $\nu_v^t(0) = \mu_t(0) = 0$ la positivité de k est acquise (*cf.* §4.4).

On démontre le théorème 6.3.3 en trois temps.

1) construction d'approximations,
2) estimations a priori,
3) passage à la limite dans les équations.

1) **Construction d'approximations**. Les approximations de $(M6)$ sont construites avec la méthode de temps de retard (*cf.* section 4.1.2). On rappelle que la fonction de retard $\pi_{(\tau, \mathcal{T}')}$ est définie pour $u \in L^p([0, \mathcal{T}], X)$ (où X est un espace de Banach) par la formule (*cf.* définition 4.1.2)

$$\begin{cases} \forall\, t \in [\tau, \mathcal{T}'], \quad \pi_{(\tau, \mathcal{T}')}(u)(t) \overset{def}{=} u(t - \tau), \\ \forall\, t \in [0, \tau], \quad \pi_{(\tau, \mathcal{T}')}(u)(t) \overset{def}{=} u(0). \end{cases}$$

Étant donné $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\tau_n = \frac{\mathcal{T}}{n}, \quad \tau_j = \pi_{\tau_n, j\tau_n}.$$

i) Initialisation. On raisonne sur l'intervalle de temps $[0, \tau_n]$. Soit

$$a_1 = \mu_t(k_0) + \nu.$$

La fonction a_1 satisfait l'hypothèse (H.6.7) sur $[0, \tau_n]$ car μ_t est bornée et positive. On peut donc considérer l'application λ_{a_1} restrainte à $[0, \tau_n]$ et considérer

$$\rho^1 = \rho_{a_1}(\lambda_{a_1}^{-1}(P_0)), \quad p_s^1 = \lambda_{a_1}^{-1}(P_0),$$

où $(\underline{\overrightarrow{v}}, P_0)$ est l'unique solution dans $L^\infty([0, \mathcal{T}], Z) \times L^2([0, \mathcal{T}], H_m^1(\Gamma_s))$ de (6.3.1). Soit

$$k^1 \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0, \tau_n], W_0^{1,p}(\Omega))$$

l'unique solution positive au sens des distributions de

$$\begin{cases} \partial_t k^1 - \lambda \Delta k^1 - \partial_z(\nu_t(k_0)\, \partial_z k^1) = \\ \nu_v^t(k_0)\, |\partial_z \rho^1|^2 + \mu_t(k_0)\, \partial_z \rho^1 - k^1 \sqrt{k_0} \quad \text{dans } [0, \tau_n] \times \Omega, \quad k^1|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

— L'existence de k^1 s'obtient en raisonnant comme dans le chapitre 4,

— l'unicité car l'équation est linéaire avec des données homogènes.

Comme $k^1|_{t=0} = k_0$, $k^1 = \pi_1(k_0)$. Par conséquent, k^1 est l'unique solution de

$$\begin{cases} \partial_t k^1 - \lambda \Delta k^1 - \partial_z(\nu_t(\pi_1(k^1))\, \partial_z k^1) = \\ \nu_v^t(\pi_1(k^1))\, |\partial_z \rho^1|^2 + \mu_t(\pi_1(k^1))\, \partial_z \rho^1 - k^1 \sqrt{\pi_1(k^1)} \quad \text{dans } [0, \tau_n] \times \Omega, \\ k^1|_{t=0} = k_0 \end{cases}$$

et

$$a_1 = \mu_t(\pi_1(k^1)) + \nu.$$

ii) Hérédité. Soit $j < n$. On suppose construite

$$k^j \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0, j\tau_n], W_0^{1,p}(\Omega))$$

positive p.p et unique solution au sens des distributions de

$$\begin{cases} \partial_t k^j - \lambda \Delta k^j - \partial_z(\nu_t(\pi_j(k^j))\, \partial_z k^j) = \\ \nu_v^t(\pi_j(k^j))\, |\partial_z \rho^j|^2 + \mu_t(\pi_j(k^j))\, \partial_z \rho^j - k^j \sqrt{\pi_j(k^j)} \quad \text{dans } [0, j\tau_n] \times \Omega, \\ k^j|_{t=0} = k_0 \end{cases}$$

où

$$a_j = \mu_t(\pi_j(k^j)) + \nu, \quad \rho^j = \rho_{a_j}(\lambda_{a_j}^{-1}(P_0)), \quad p_s^j = \lambda_{a_j}^{-1}(P_0).$$

Soient

$$a_{j+1} = \mu_t(\pi_{j+1}(k^j)) + \nu, \quad \rho^{j+1} = \rho_{a_{j+1}}(\lambda_{a_{j+1}}^{-1}(P_0)), \quad p_s^{j+1} = \lambda_{a_{j+1}}^{-1}(P_0)$$

définies sur $[0,(j+1)\tau_n]$. Remarquons que a_{j+1} vérifie (H.6.7) car μ_t est bornée et positive, ce qui permet de considérer $\lambda_{a_{j+1}}$ inversible et l'application $\rho_{a_{j+1}}$.
Soit

$$k^{j+1} \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0,(j+1)\tau_n], W_0^{1,p}(\Omega))$$

l'unique solution positive au sens des distributions de

$$\begin{cases} \partial_t k^{j+1} - \lambda\Delta k^{j+1} - \partial_z(\nu_t(\pi_{j+1}(k^j))\,\partial_z k^{j+1}) = \nu_v^t(\pi_{j+1}(k^j))\,|\partial_z \rho^{j+1}|^2 + \\ \mu_t(\pi_{j+1}(k^j))\,\partial_z\rho^{j+1} - k^{j+1}\sqrt{\pi_{j+1}(k^j)} \quad \text{dans } [0,(j+1)\tau_n]\times\Omega, \\ k^{j+1}|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

— Il se pose la question de savoir si $k^{j+1} = k^j$ sur $[0, j\tau_n]$.

Comme $\pi_{j+1}(k^j) = \pi_j(k^j)$ sur $[0, j\tau_n]$ (*cf.* le lemme 4.1.4) les résultats d'unicité font que cette question est équivalente à :

— est-ce que $\rho^j = \rho^{j+1}$ sur $[0, j\tau_n]$?

Notons que sur $[0, j\tau_n]$, $a_j = a_{j+1}$, de sorte que

$$p_s^j = \lambda_{a_j}^{-1}(P_0) = \lambda_{a_{j+1}}^{-1}(P_0) = p_s^{j+1}$$

sur $[0, j\tau_n]$. Donc grâce au résultat d'unicité du théorème 6.2.1

$$\rho^j = \rho_{a_j}(\lambda_{a_j}^{-1}(P_0)) = \rho_{a_{j+1}}(\lambda_{a_{j+1}}^{-1}(P_0)) = \rho^{j+1}$$

sur $[0, j\tau_n]$. Donc k^j et k^{j+1} coïncident sur $[0, j\tau_n]$. En raisonnant comme dans la section 4.1.2 on voit que k^{j+1} est une solution de

$$\begin{cases} \partial_t k^{j+1} - \lambda\Delta k^{j+1} - \partial_z(\nu_t(\pi_{j+1}(k^{j+1}))\,\partial_z k^{j+1}) = \\ \nu_v^t(\pi_{j+1}(k^{j+1}))\,|\partial_z\rho^{j+1}|^2 + \\ \mu_t(\pi_{j+1}(k^{j+1}))\,\partial_z\rho^{j+1} - k^{j+1}\sqrt{\pi_{j+1}(k^{j+1})} \quad \text{dans } [0,(j+1)\tau_n]\times\Omega, \\ k^{j+1}|_{t=0} = k_0. \end{cases}$$

En poursuivant la récurrence jusqu'à n on construit

$$\begin{cases} k_n \in \bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)), \quad k_n \geq 0, \\ a_n = \mu_t(\pi_n(k_n)) + \nu, \\ p_s^n = \lambda_{a_n}^{-1}(P_0), \\ \rho_n = \rho_{a_n}(p_s^n) = \rho_{a_n}(\lambda_{a_n}^{-1}(P_0)) \end{cases}$$

tels que

$$(6.3.6)\qquad \begin{cases} \partial_t k_n - \lambda\Delta k_n - \partial_z(\nu_t(\pi_n(k_n))\,\partial_z k_n) = \nu_v^t(\pi_n(k_n))\,|\partial_z\rho_n|^2 + \\ \mu_t(\pi_n(k_n))\,\partial_z\rho_n - k_n\sqrt{\pi_n(k_n)} \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Omega, \\ k_n|_{t=0} = k_0 \end{cases}$$

et

$$(6.3.7)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t\underline{\vec{v}} + (\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}} + K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}}) + \vec{k}\times\underline{\vec{v}} + \\ \nabla(p_s^n + \mathcal{M}(M(\rho_n)) = 0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s, \end{cases} \\ (b) & div\underline{\vec{v}} = 0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s, \\ (c) & \begin{cases} \partial_t\rho_n + \vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\rho_n - \mathcal{K}_h\Delta\rho_n - \\ \partial_z((\mu_t(\pi_n(k_n)) + \nu)\,\partial_z\rho_n) = F(\rho_n) \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Omega \end{cases} \end{cases}$$

en rappelant que l'on s'est placé dans le cas homogène $\vec{\mathrm{v}}=0$ pour simplifier et que $(\underline{\vec{v}}, P_0)$ est la solution de $(6.3.1)$. Par ailleurs, on a pour tout n

$$||\rho_n||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \le ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}.$$

2) **Estimations a priori**. On commence par les estimations déjà acquises, c'est-à-dire celles portant sur $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ et sur $(k_n)_{n\in I\!N}$.

Le transport géostrophique ne travaille pas (*cf.* lemme 6.2.2 avec j assez grand). On raisonne comme dans les démonstrations des théorèmes 6.2.1 et 6.2.2 à partir de l'équation $(6.3.7, b)$ et on utilise l'estimation L^∞ $(6.2.1)$ combinée à la sous linéarité de F et la bornitude de μ_t. Il en résulte que

— $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$,
— $(\partial_t\rho_n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], (H^1_{f,l}(\Omega))')$.ÃĐ

En raisonnant comme dans la section 5.1 à partir de l'équation $(6.3.6)$, on en déduit en appliquant une variante immédiate des lemmes 4.2.1 et 4.2.4 combinée au corollaire 4.2.1 (sections 4.2.3 et 4.2.4) que puisque ν_t satisfait une hypothèse de croissance,

— $(k_n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))$ et dans $L^s([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ pour tous $s < 2$ et $p < 3/2$,
— $(\partial_t k_n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^1([0,\mathcal{T}], W^{1,q_0}(\Omega))$, $q_0 > 1$.

Il reste à estimer la pression. Par construction

$$p_s^n = P_0 - \mathcal{N}(\rho_n) = P_0 - \mathcal{M}(M(\rho_n)).$$

Puisque $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$, on déduit de cette égalité combinée à la continuité de $\mathcal{N}$ (*cf.* lemme 6.3.2) que

— $(p_s^n)_{n\in I\!N}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$.

Par conséquent il existe

$$\left\{\begin{array}{l}(\rho, k, p_s) \in \\ L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega)) \times \displaystyle\bigcap_{p<3/2} L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega)) \times L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))\end{array}\right.$$

tel que de la suite (ρ_n, k_n, p_s^n) on peut extraire une sous-suite (toujours notée de la même manière) vérifiant

- $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible, dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort, p.p dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$, dans $L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ faible étoile et $||\rho||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} \leq ||\rho^0||_{L^\infty([0,\mathcal{T}]\times\Omega)}$,
- $(k_n)_{n\in I\!N}$ converge vers k dans $L^p([0,\mathcal{T}], W_0^{1,p}(\Omega))$ faible ($p<3/2$), $L^s([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort ($s<2$) et p.p. dans $[0,\mathcal{T}]\times\Omega$,
- $(p_s^n)_{n\in I\!N}$ converge vers p_s dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$ faible.

Il ne reste plus qu'à montrer que $(\underline{\vec{v}}, \rho, k, p_s)$ est une solution du problème $(M6)$.

3) **Passage à la limite**. On a étudié en détail le passage à la limite dans les équations pour k et ρ dans les chapitre 4 et 5 respectivement et le passage à la limite dans le couplage (k,ρ) dans le chapitre 5. C'est pourquoi, il suffit maintenant de se concentrer sur les termes spécifiques dans le couplage à savoir

a) les termes de pression $\nabla(p_s^n + \mathcal{M}(M(\rho_n)))$ dans $(6.3.7, a)$,
b) le transport géostrophique $\vec{U}_g\,(p_s^n, \rho_n)\,.\nabla\rho_n$ dans $(6.3.7, b)$.

La fonction de retard ayant de robustes propriétés dans le passage à la limite (*cf.* lemme 4.1.2), sa présence ne modifie en rien les raisonnements effectués dans les démonstrations antérieures.

a) *Termes de pression*. Soit $\phi \in \mathcal{D}'([0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s)$. Comme $(p_s^n)_{n\in I\!N}$ converge faiblement vers p_s dans l'espace $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla p_s^n.\phi = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla p_s.\phi.$$

Par ailleurs, comme $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ faible et $\mathcal{N} = \mathcal{M}\circ M$ est linéaire continu de $L^2([0,\mathcal{T}], H^1_{f,l}(\Omega))$ dans $L^2([0,\mathcal{T}], H^1(\Gamma_s))$ (*cf.* lemme 6.3.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla(\mathcal{N}(\rho_n))\,\phi = \int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \nabla(\mathcal{N}(\rho))\,\phi.$$

On a donc bien au sens des distributions dans $[0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s$

$$
(6.3.8)\qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \partial_t\underline{\vec{v}}+(\underline{\vec{v}}\nabla)\underline{\vec{v}}+\ K_b Rot\,(rot\underline{\vec{v}})+\vec{k}\times\underline{\vec{v}}+ \\ \nabla(p_s+\mathcal{M}(M(\rho))=0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s, \end{cases} \\ (b) & div\underline{\vec{v}}=0 \quad \text{dans } [0,\mathcal{T}]\times\Gamma_s. \end{cases}
$$

b) *Transport géostrophique*. On a par définition

$$
\int_0^{\mathcal{T}} <\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\rho_n,\phi> = -\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\phi
$$

où

$$
\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)=U_g(p_s^n,\rho_n)\,\vec{e}_1+V_g(p_s^n,\rho_n)\,\vec{e}_2
$$

chaque coordonnée étant définie par

$$
U_g(p_s^n,\rho_n)=-M(\partial_y\rho_n)-\partial_y p_s^n,\quad V_g(p_s^n,\rho_n)=M(\partial_x\rho_n)+\partial_x p_s^n,
$$

de sorte que

$$
\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\phi\;= \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,M(\partial_x\rho_n)\,.\,\partial_y\phi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\partial_x p_s^n.\,\partial_y\phi- \\ \displaystyle\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,M(\partial_y\rho_n)\,.\,\partial_x\phi+\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\partial_y p_s^n.\,\partial_x\phi. \end{cases}
$$

On passe à la limite dans les termes du membre de droite les uns après les autres. Comme $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1_{f,l}(\Omega))$ faible et $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort et que M est linéaire continu

$$
\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,M(\partial_x\rho_n)\,.\,\partial_y\phi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho\,M(\partial_x\rho)\,.\,\partial_y\phi, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,M(\partial_y\rho_n)\,.\,\partial_x\phi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho\,M(\partial_y\rho)\,.\,\partial_x\phi, \end{cases}
$$

Enfin, puisque $(p_s^n)_{n\in I\!N}$ converge vers p_s dans $L^2([0,\mathcal{T}],H^1(\Gamma_s))$ faible et que $(\rho_n)_{n\in I\!N}$ converge vers ρ dans $L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ fort

$$
\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\partial_x p_s^n.\,\partial_y\phi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho\,\partial_x p_s^n.\,\partial_y\phi, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho_n\,\partial_y p_s^n.\,\partial_x\phi=\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho\,\partial_y p_s^n.\,\partial_x\phi. \end{cases}
$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathcal{T}} <\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\rho_n,\phi> = \int_0^{\mathcal{T}} <\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho,\phi>,$$

où :

$$\int_0^{\mathcal{T}} <\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho,\phi> = -\int_0^{\mathcal{T}}\int_\Omega \rho\,\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\phi.$$

Il faut noter que $\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\in L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)$ et que grâce à l'estimation L^∞ sur ρ, la formule précédente définit une forme dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$. De plus, ce qui précède montre aussi que

$$\lim_{n\to\infty}\vec{U}_g\,(p_s^n,\rho_n)\,.\nabla\rho_n = \vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho$$

dans $L^2([0,\mathcal{T}],(H^1_{f,l}(\Omega))')$ faible étoile.

Conclusion. Il faut passer à la limite d'abord dans l'équation pour ρ en montrant que l'égalité d'énergie est préservée puis dans l'équation pour k. Pour cela, il suffit de recopier la démonstration du théorème 5.1.1 (§5.1, chapitre 5) portant sur le problème $(M3)$ combinée à la démonstration du théorème 6.2.1 (problème $(M9)$). La seule différence ici par rapport aux problèmes antérieurs réside dans le terme de transport géostrophique qui couple ρ et p_s dans l'équation pour ρ. Le point 3.b) plus haut règle cette difficulté. Donc, le couple (ρ,k) vérifie

$$(6.3.9)\quad \begin{cases} (a) & \partial_t\rho+\vec{U}_g\,(p_s,\rho)\,.\nabla\rho-\mathcal{K}_h\Delta\rho-\partial_z((\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho)=F(\rho),\\ (b) & \begin{cases}\partial_t k-\lambda\Delta k-\partial_z(\nu_t(k)\,\partial_z k)=\\ \nu_v^t(k)\,|\nabla\rho|^2-k\sqrt{|\,k\,|}+\mu_t(k)\,\partial_z\rho,\end{cases}\\ (c) & \rho|_{\Gamma_f\cup\Gamma_l}=0,\quad (\mu_t(k)+\nu)\,\partial_z\rho|_{\Gamma_s}=-\alpha\rho,\quad (\alpha>0),\\ (d) & k|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f}=0,\quad k|_{\Gamma_s}=0,\\ (e) & (\rho,k)|_{t=0}=(\rho^0,k_0).\end{cases}$$

On a donc montré en combinant (6.3.8) et (6.3.9) que $(\vec{\underline{v}},\rho,k,p_s)$ est une solution du problème $(M6)$. Le cas non homogène lorsque ν_t est continue bornée dérivable de dérivée bornée et que $\vec{\mathrm{v}}\in H^{3/2}(\Omega)$ se traite de la même manière en appliquant les résultats du §4.3. Enfin, en faisant tendre n vers l'infini dans l'équation

$$P_0=p_s^n+\mathcal{M}(M(\rho_n)),$$

on obtient par construction

$$P_0=p_s+\mathcal{M}(M(\rho)),\quad \rho=\rho_a(p_s),\quad a=\mu_t(k)+\nu,$$

et donc

$$p_s = \lambda_a^{-1}(P_0),$$

ce qui dit en un certain sens que p_s est solution d'un problème de point fixe. $\diamondsuit$

Cet essai s'achève sur la fin de cette démonstration où l'on a prouvé l'existence d'une solution au système géostrophico-barotrope $(M6)$. On ne sait pas si la solution est unique dans un quotient par les constantes bien que l'on conjecture que oui.

Dans l'appendice A on étudie un système d'équations primitives linéarisées avec des termes de pression additionnels et dans l'appendice B on fait quelques remarques sur le problème de faire tendre le nombre de Rossby vers 0.

APPENDICE A

ÉQUATIONS PRIMITIVES AVEC DES TERMES DE PRESSIONS ADDITIONNELS

ORIENTATION

1) On revient dans cet appendice sur les approximations suivantes faites dans le chapitre 1 comme résultat de l'approximation de Boussinesq :

- ne pas prendre la pression en compte dans l'équation d'état

$$\rho = \rho(S, T, p),$$

- ne pas prendre les termes de pression en compte dans le bilan d'énergie qui conduit à l'équation de la chaleur.

On tente une modélisation qui prenne en considération certains termes de pression négligés. On obtient le système

$$(M14) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (a) & \left\{ \begin{array}{l} -\nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} - \rho_T\, M(\nabla T) + \\ (1 - z\rho_p) \nabla p_s = 0, \end{array} \right. \\ (b) & -\mathcal{K}_h \Delta T - \mathcal{K}_v \partial^2_{zz} T + \alpha A(p_s) = 0, \\ (c) & div\left(\displaystyle\int_{-\delta}^{0} \vec{v}\ dz \right) = 0, \\ (d) & T|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l \cup \Gamma_f} = 0, \quad \partial_z \vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, f = f(x,y,z) \in C^0(\Omega, I\!R), \quad M(f)(x,y,z) = \displaystyle\int_z^0 f(x,y,z')\, dz', \\ \forall\, q = q(x,y) \in C^1(\Gamma_s, I\!R), \quad A(q)(x,y,z) = \dfrac{1 - z\rho_p}{1 + \alpha\rho_T z}\ \vec{v}_0 . \nabla q, \end{array} \right.$$

$\nu_h > 0$, $\nu_v > 0$, $\mathcal{K}_h > 0$, $\mathcal{K}_v > 0$, $\rho_T > 0$, $\rho_p \geq 0$, ρ_0 et α sont des constantes, $\vec{v}_0$ est un vecteur constant.

Le système $(M14)$ est un système d'équations primitives stationnaires linéarisées sans terme de Coriolis avec $\vec{v}$, T et p_s pour inconnues et où pour simplifier la présentation, on suppose que Ω est un cylindre $\Omega = \Gamma_s \times]-\delta, 0[$. De même, on prend pour la température T des conditions aux limites homogènes et on ne considère pas la salinité S.

2) On commence par la modélisation de $(M14)$ à partir des équations de base de l'océanographie, en particulier

— l'équation hydrostatique,
— l'équation de conservation $(1.2.5)$ pour un fluide isentropique

$$\rho\, c_p \frac{DT}{Dt} + T\left(\frac{\partial_T \rho}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt} = \mathcal{K}_c^t \Delta_c T. \tag{1.2.5}$$

On élimine la pression des équations à l'aide de l'équation hydrostatique combinée à un argument de point fixe en faisant apparaître la pression superficielle p_s. On commence par traiter l'équation d'état qui lorsqu'elle est linéarisée devient dans ce cas

$$\rho = f(T, p_s) = \rho_0 \,+\, \rho_p\,(p_s - p_s^0) \,-\, \rho_T\,(T - T^0),$$

p_s^0 et T^0 sont des constantes de références. C'est ce qui conduit à l'introduction du terme de pression additionnel $-z\rho_p \nabla p_s$ dans l'équation pour la vitesse. On traite dans un deuxième temps le bilan d'énergie $(1.2.5)$ dans une forme très simplifiée. Le terme $A(p_s)$ dans l'équation pour T vient du terme Dp/Dt dans l'équation $(1.2.5)$.

3) On effectue l'analyse mathématique de $(M14)$. On commence par donner un sens aux termes de pression additionnels puis on démontre un résultat d'existence et d'unicité.

THÉORÈME A.0.1 — *On suppose que* $\vec{\mathrm{v}} \in L^2(\Gamma_s)$*. Il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* (ρ_p, δ, α) *satisfaisant* $\sup(|\rho_p|, \delta, |\alpha|) < \eta$*, il existe un unique*

$$(\vec{v}, T, p_s) \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \times H_0^1(\Omega) \times \left(L^2(\Gamma_s)/I\!R\right)$$

solution de $(M14)$ *au sens des distributions.* $\diamondsuit$

Dans l'énoncé précédent, $L^2(\Gamma_s)/I\!R$ est le quotient de $L^2(\Gamma_s)$ par les constantes. On rappelle que

$$\begin{cases} H_{f,l}^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_f \cup \Gamma_l} = 0\right\}, \\ \mathcal{Q}_{oc}^{1,2} = \left\{\vec{v} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2,\ (u,v) \in H_{f,l}^1(\Omega),\ div(\tilde{M}(\vec{v})) = 0\right\}. \end{cases}$$

La démonstration est basée sur la version stationnaire linéarisée du théorème 2.2.1 combiné à un argument de point fixe sur p_s.

A. 1 — MODÉLISATION DES TERMES DE PRESSION

A.1.1 — L'ÉQUATION D'ÉTAT

On rappelle que l'on ne tient pas compte de la salinité pour simplifier la présentation. La densité ρ est liée à la température T et la pression p par une équation d'état

$$\rho = \rho(p, T)$$

(*cf.* section 1.2.2). Par ailleurs, on suppose l'équation hydrostatique satisfaite. Elle est écrite sous la forme

$$p = p_s + M(\rho)$$

où l'on pose $g = 1$.

PROPOSITION A.1.1 — *On suppose que*

$$(p, T) \to \rho(p, T)$$

est de classe C^1 sur $I\!R^2$ et que

$$\frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

sont bornées par une constante $C > 0$ vérifiant $\delta C < 1$. Alors, il existe f continue de $I\!R^2$ dans $I\!R$ telle que l'équation "$\rho = \rho(T, p)$" soit équivalente à "$\rho = f(T, p_s)$" pour tout $(\rho, T, p, p_s) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Gamma_s)$ vérifiant $p = p_s + M(\rho)$. ◇

DÉMONSTRATION — On suppose $\delta C < 1$. Soit $(\rho, T, p, p_s) \in [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Gamma_s)$ vérifiant $p = p_s + M(\rho)$. On a

$$\rho(T, p) = \rho(T, p_s + M(\rho)) = \rho. \tag{A.1.1}$$

Ce problème est un problème de point fixe. On fixe $(p_s, T) \in L^2(\Gamma_s) \times L^2(\Omega)$ et soit l'application

$$F : \begin{cases} L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \\ \rho \longrightarrow \rho(T, p_s + M(\rho)). \end{cases}$$

On démontre par la suite que l'application F est contractante sur $L^2(\Omega)$. Soit $(\rho_1, \rho_2) \in [L^2(\Omega)]^2$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis pour $M \in \Omega$ fixé on a

$$|F(\rho_1) - F(\rho_2)|^2 \leq \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^2 |M(\rho_1 - \rho_2)|^2 \leq C^2 |M(\rho_1 - \rho_2)|^2$$

car on a supposé que $\partial\rho/\partial p$ est bornée par C. On intègre cette dernière inégalité par rapport à M puis on utilise l'estimation $(2.4.18)$ de la norme de l'opérateur M dans $L^2(\Omega)$ obtenue dans le lemme 2.4.2 (*cf.* section 2.4.2). Comme Ω est un cylindre, $C_H = \delta$ dans ce cas. Il en résulte

$$||F(\rho_1) - F(\rho_2)||_{L^2(\Omega)} \leq \delta C||\rho_1 - \rho_2||_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque $\delta C < 1$, il résulte de cette dernière inégalité que l'application F est contractante dans $L^2(\Omega)$ qui est un espace complet. Par conséquent, pour chaque T et p_s fixés il existe un unique $\rho \in L^2(\Omega)$ solution de $(A.1.1)$, ce qui permet de définir une application

$$f : \begin{cases} L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_s) \longrightarrow L^2(\Omega), \\ (T, p_s) \longrightarrow \rho = f(T, p_s), \end{cases}$$

où $f(T, p_s)$ est solution du problème de point fixe $(A.1.1)$ qui est équivalent à l'équation

$$\rho = f(T, p_s).$$

La continuité de f est une conséquence de la régularité de $(p, T) \to \rho(p, T)$. $\diamondsuit$

Compte tenu des faibles variations de ρ autour de ρ_0, on linéarise l'équation d'état $\rho = f(T, p_s)$ qui devient

$$\rho = f(T, p_s) = \rho_0 + \rho_p\,(p_s - p_s^0) - \rho_T\,(T - T^0)$$

où $\rho_p > 0$, ρ_T, p_s^0 et T^0 sont des constantes. Notons que lorsque p_s augmente ρ augmente et lorsque T augmente ρ diminue, ce qui est conforme au sens physique commun.

Sous une forme adimensionnalisée cette équation d'état devient

$$\rho = 1 + \rho_p\,(p_s - 1) - \rho_T\,(T - 1), \tag{A.1.2}$$

sans changer la notation des constantes. À partir de là, on reprend le travail de réduction du système fait dans la section 1.6.4. Le système de départ est $(EP3)$ où pour simplifier on prend $Ro = 1$. L'équation d'état $(EP3, e)$ est remplacée par $(A.1.2)$ et on ne tient pas compte de l'équation satisfaite par la température traitée dans la section suivante de ce paragraphe. Il vient

$$(EP4) \qquad \begin{cases} (a) \quad \dfrac{D\vec{v}}{Dt} - \nu_h \Delta\vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz}\vec{v} + f\,\vec{k} \times \vec{v} + \nabla p = 0, \\ (b) \quad div\left(\displaystyle\int_{-\delta}^{0} \vec{v}\;dz\right) = 0, \\ (c) \quad \partial_z p = -\,\rho, \\ (d) \quad \rho = 1 + \rho_p\,(p_s - 1) - \rho_T\,(T - 1). \end{cases}$$

Les opérations effectuées sont :

— intègration de l'équation hydrostatique par rapport à la verticale,
— expression de ρ à l'aide de l'équation d'état,
— report du tout dans $(EP4, a)$.

Comme p_s ne dépend pas de z, $M(p_s) = -z\, p_s$. C'est pourquoi on obtient pour $\vec{v}$

$$(A.1.3) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \dfrac{D\vec{v}}{Dt} - \nu_h \Delta \vec{v} - \nu_v \partial^2_{zz} \vec{v} + f\,\vec{k} \times \vec{v} + \\ (1 - z\rho_p)\nabla p_s - \alpha_T M(\nabla T) = 0, \end{cases} \\ (b) & div(\displaystyle\int_{-\delta}^{0} \vec{v}\ dz) = 0. \end{cases}$$

L'équation $(A.1.3, a)$ diffère de $(1.6.7, a)$ (*cf.* section 1.6.4) par le terme $-z\rho_p\,\nabla p_s$. Si en prenant $\alpha_T = 1$ dans $(A.1.3)$ on ne change rien au problème de mathématiques étudié ultérieurement, on ne peut pas choisir $\alpha_p = 1$. En effet, le résultat d'existence obtenu a lieu pour des valeurs de α_p assez petites, c'est-à-dire lorsque le terme de pression supplémentaire introduit dans l'équation est “assez petit", puisque l'argument utilisé est un argument de point fixe non topologique (*i.e.* il n'est pas question de “degré" dans ce qui suit). C'est pour la même raison que l'on est obligé de supposer que le terme de Coriolis f est assez petit (*i.e.* on est “assez près" de l'équateur). Pour alléger la présentation, on a préféré ne pas en tenir compte dans $(M14)$ écrit au début de cet appendice.

A.2.2 — LE BILAN D'ÉNERGIE

Le bilan d'énergie thermodynamique est décrit par

$$(1.2.5) \qquad \rho\, c_p \frac{DT}{Dt} + T\left(\frac{\partial_T \rho}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt} = \mathcal{K}^t_c \Delta_c T.$$

Dans cette équation on néglige généralement le terme $A = Dp/Dt$. Cette approximation est plus ou moins bien justifiée dans cet ouvrage à l'aide de l'approximation de Boussinesq. Certains auteurs invoquent des arguments “moléculaires" qui ne sont pas plus convaincants que l'usage de l'approximation de Boussinesq. Le but de cette section est une tentative de modélisation de ce terme. Les approximations faites sont :

(Ap.1) le coefficient α défini par

$$\alpha \stackrel{def}{=} \frac{T}{\rho\, c_p}\left(\frac{\partial_T \rho}{\rho}\right)$$

est supposé constant,

(Ap.2) les transformations sont isentropiques, (Ap.3) dans les termes de dérivée totale

$$\frac{D}{Dt} = \vec{v}_0 . \nabla + w \partial_z,$$

le champ horizontal $\vec{v}$ est constant égal à un vecteur incompressible $\vec{v}_0$ qui ne dépend pas de z (cas d'une couche océanique),

(Ap.4) le coeficient A ne dépend pas de z.

LEMME A.1.1 — *En faisant les approximations* (Ap.1), (Ap.2), (Ap.3) *et* (Ap.4) *on obtient la formule*

$$A = \frac{Dp}{Dt} = A(p_s) = \frac{1 - \rho_p z}{1 + \alpha \rho_T z} \vec{v}_0 . \nabla p_s = \vec{c}(z) . \nabla p_s. \qquad (A.1.4) \qquad \diamondsuit$$

COROLLAIRE A.1.1 — *L'équation de la chaleur* (1.2.5) *stationnaire linéarisée devient*

$$- \mathcal{K}_h \Delta T - \mathcal{K}_v \partial^2_{zz} T + \alpha A(p_s) = 0. \qquad (A.1.5) \qquad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — On obtient $(A.1.4)$ en trois étapes :

i) utilisation de (Ap.1, 2) en combinant l'équation d'état $(A.1.2)$ avec le bilan d'énergie sans diffusion $(1.2.5)$ et l'équation de Boussinesq,

ii) calcul de la dérivée totale de l'équation hydrostatique,

iii) utilisation de (Ap.3, 4) combinées aux résultats des étapes i) et ii)ÃĐ

i) *Bilan d'énergie et équation d'état.* Le point de départ de cette modélisation est le bilan d'énergie pour une transformation isentropique

$$\rho \, c_p \frac{DT}{Dt} + T \left(\frac{\partial_T \rho}{\rho} \right) \frac{Dp}{Dt} = 0$$

qui ne tient pas compte de la diffusion, considérée ici comme un des principaux facteurs de l'irréversibilité des transformations. Cette équation est écrite sous la forme

$$\frac{DT}{Dt} + \alpha \frac{Dp}{Dt} = 0 \qquad (A.1.6)$$

où α est défini dans (Ap.1) plus haut et supposé constant. En dérivant l'équation d'état $(A.1.2)$ il vient

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho_p \frac{Dp_s}{Dt} - \rho_T \frac{DT}{Dt}$$

qui reportée dans le bilan dénergie $(A.1.6)$ conduit à

$$(A.1.7) \qquad (\partial_t + \vec{v}.\nabla)\,\rho = \rho_p \frac{Dp_s}{Dt} + \alpha\rho_T \frac{Dp}{Dt} - w\partial_z\rho.$$

La moyenne par M de l'équation $(A.1.7)$ s'écrit

$$(A.1.8) \qquad M[(\partial_t + \vec{v}.\nabla)\,\rho] = \rho_p M\left[\frac{Dp_s}{Dt}\right] + \alpha\rho_T M\left[\frac{Dp}{Dt}\right] - M(w\partial_z\rho).$$

Il faut calculer $M(w\partial_z\rho)$. En intègrant par parties

$$M(w\partial_z\rho) = \int_z^0 w\partial_z\rho = [w\rho]_z^0 - M(\rho\partial_z w).$$

D'après l'hypothèse du toit rigide

$$[w\rho]_z^0 = -w\rho.$$

Par ailleurs, d'après l'approximation de Boussinesq

$$\partial_z\rho = -div\vec{v},$$

de sorte que

$$M(w\partial_z\rho) = -w\rho + M(\rho div\vec{v})$$

ce que l'on reporte dans $(A.1.8)$ pour obtenir

$$(A.1.9) \quad M[(\partial_t + \vec{v}.\nabla)\,\rho] = \rho_p M\left[\frac{Dp_s}{Dt}\right] + \alpha\rho_T M\left[\frac{Dp}{Dt}\right] + w\,\rho - M(\rho\, div\vec{v}),$$

équation utilisée dans l'étape iii) plus loin. Avant, on s'intéresse à l'équation hydrostatique.

ii) *Dérivation de l'équation hydrostatique*. On a directement

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dp_s}{Dt} + \frac{D}{Dt}M(\rho).$$

Le calcul de $(D/Dt)M(\rho)$ conduit à

$$\frac{D}{Dt}M(\rho) = (\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) + w\partial_z M(\rho) = (\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) - w\,\rho$$

d'où l'on déduit

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dp_s}{Dt} + (\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) - w\,\rho$$

soit encore

$$(A.1.10) \qquad (\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) = \frac{Dp}{Dt} - \frac{Dp_s}{Dt} + w\,\rho.$$

iii) *Synthèse de* $(A.1.9)$ *et* $(A.1.10)$. La difficulté dans cette modélisation réside dans le fait qu'en général

$$(\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) \neq M[(\partial_t + \vec{v}.\nabla)\,\rho]$$

sauf dans le cadre stationnaire de (Ap.3) où, puisque $\vec{v}_0$ ne dépend pas de z

$$(\partial_t + \vec{v}.\nabla)M(\rho) = \vec{v}_0.\nabla M(\rho) = M[(\partial_t + \vec{v}.\nabla)\,\rho].$$

Enfin,

$$M(\rho\, div\vec{v}) = M(\rho\, div\vec{v}_0) = 0$$

bien que cette approximation ne soit pas indispensable mais simplifie la présentation. Enfin, puisque p_s ne dépend pas de z

$$\frac{Dp_s}{Dt} = \vec{v}_0.\nabla p_s, \quad M\left[\frac{Dp_s}{Dt}\right] = \vec{v}_0.\nabla M(p_s) = -\,z\,\vec{v}_0.\nabla p_s.$$

En combinant maintenant $(A.1.9)$ à $(A.1.10)$ on a en posant $A = Dp/Dt$,

$$(I - \alpha\rho_T M)(A) = (1 - z\rho_p)\;\vec{v}_0.\nabla p_s.$$

Enfin, puisque A ne dépend pas de z

$$M(A) = -zA$$

d'où la formule

$$(A.1.4) \qquad A = \frac{Dp}{Dt} = A(p_s) = \frac{1-\rho_p z}{1+\alpha\rho_T z}\;\vec{v}_0.\nabla p_s = \vec{c(z)}.\nabla p_s.$$

Il faut noter que lorsque $|\alpha\rho_T\delta| < 1$, le vecteur $\vec{c(z)}$ est bien défini.

Conclusion. On combine le système $(A.1.3)$ où $f = 0$ avec l'équation de la chaleur. Il en résulte $(M14)$ dans lequel on a pris des conditions aux limites homogènes pour la température,

$$(M14) \qquad \begin{cases} (a) \quad \begin{cases} -\nu_h\Delta\vec{v} - \nu_v\partial^2_{zz}\vec{v} - \rho_T\, M(\nabla T) + \\ (1 - z\rho_p)\nabla p_s = 0, \end{cases} \\ (b) \quad -\mathcal{K}_h\Delta T - \mathcal{K}_v\partial^2_{zz}T + \alpha\dfrac{1-\rho_p z}{1+\alpha\rho_T z}\;\vec{v}_0.\nabla p_s = 0, \\ (c) \quad div\left(\displaystyle\int_{-\delta}^{0}\vec{v}\;dz\right) = 0, \\ (d) \quad T|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{v}\,|_{\Gamma_l\cup\Gamma_f} = 0, \quad \partial_z\vec{v}\,|_{\Gamma_s} = \vec{\mathrm{v}}, \end{cases}$$

Dans le paragraphe suivant, on montre un résultat d'existence et d'unicité au système $(M14)$, lorsque δ (quotient d'aspect), α et ρ_p sont assez petits.

Remarque A.1.1 — Les approximation (Ap.3) et (Ap.4) interviennent à la fin de cette modélisation. On peut décider de les faire intervenir dès le début et écrire $A = \vec{v}_0 . \nabla p$. Il se pose la question de savoir quel est le système alors obtenu et quelles sont les différences entre $(M14)$ et cet autre système. $\diamondsuit$

A. 2 — RÉSULTAT D'EXISTENCE

A.2.1 — UN ESPACE POUR LA PRESSION

Avant de donner un sens à $(M14)$ et démontrer un résultat d'existence, il faut choisir les espaces fonctionnels dans lesquels "vivent" les variables $\vec{v}$, T et p_s. Compte tenu des résultats du chapitre 2 et des conditions aux limites, il est raisonnable de chercher $\vec{v}$ dans $\mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$ et T dans $H^1_0(\Omega)$. Il se pose le problème de savoir où chercher p_s qui n'est plus un multiplicateur de Lagrange dans ce problème.

Par analogie avec les résultats sur les équations de Stokes, on est conduit à chercher la pression dans l'espace quotient

$$\Pi \stackrel{def}{=} L^2(\Gamma_s)/I\!R.$$

Cet espace est habituellement muni de la norme

$$(A.2.1) \quad \forall\, q \in \Pi, \quad ||q||_r = sup\left\{\int_{\Gamma_s} q\, div\vec{u},\ \vec{u} \in H^1_0(\Gamma_s),\ ||\,\vec{u}\,||_{[H^1_0(\Gamma_s)]^2} = 1\right\}.$$

Cette norme n'est pas la plus adaptée à ce problème. Il est plus commode d'utiliser la norme définie par

$$(A.2.2) \qquad \begin{cases} \forall\, q \in \Pi, \quad ||q||_\Pi \stackrel{def}{=} \\ sup\left\{\displaystyle\int_{\Gamma_s} q\, div(\tilde{M}(\vec{u}))\,;\ \vec{u} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2,\ ||\,\vec{u}\,||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2} = 1\right\} \end{cases}$$

en rappelant que

$$\tilde{M}(f) = \int_{-\delta}^{0} f\, dz.$$

Lemme A.2.1 — *Les normes définies respectivement par* $(A.2.1)$ *et* $(A.2.2)$ *sont équivalentes.* $\diamondsuit$

DÉMONSTRATION — On montre dans ce qui suit qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $p \in L^2(\Gamma_s)/I\!R$

$$(A.2.3) \qquad C_1 \,||\, p \,||_r \leq ||\, p \,||_\Pi \leq C_2 \,||\, p \,||_r .$$

Par la suite, on note une classe modulo $I\!R$ de la même manière qu'un de ses représentants. Soit $(p, \vec{v}) \in L^2(\Gamma_s)/I\!R \times [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$. On a par définition

$$|\int_{\Gamma_s} p \, div(\tilde{M}(\vec{v}))| \leq ||\, p \,||_r \, ||\tilde{M}(\vec{v}) \,||_{H^1_0(\Gamma_s)}.$$

Or

$$||\tilde{M}(\vec{v}) \,||^2_{H^1_0(\Gamma_s)} = \int_{\Gamma_s} \left| \nabla \int_{-\delta}^0 \vec{v} \; dz \right|^2 = \int_{\Gamma_s} \left| \int_{-\delta}^0 \nabla \vec{v} \; dz \right|^2 .$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||\tilde{M}(\vec{v}) \,||^2_{H^1_0(\Gamma_s)} \leq \delta \int_{\Gamma_s} \int_{-\delta}^0 |\nabla \vec{v} \;|^2 \leq \delta || \; \vec{v} \; ||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}.$$

Par conséquent

$$|\int_{\Gamma_s} p \, div(\tilde{M}(\vec{v}))| \leq \sqrt{\delta} \,||\, p \,||_r \, ||\vec{v}||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2},$$

une inégalité valable pour tout $(p, \vec{v}) \in \Pi \times [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$ ce qui garantit la première partie de $(A.2.3)$.

On démontre à présent la deuxième partie de $(A.2.3)$. Soit une fonction $a \geq 0$ de classe C^∞ définie sur $[-\,\delta, 0]$ et telle que

— $a = 1$ sur $[-\delta/2, 0]$,
— $a = 0$ sur $[-(3/4)\,\delta, -\delta]$.

Étant donné $\vec{u} \in H^1_0(\Gamma_s)$ on pose

$$f_a(\vec{u}) = a(z) \; \vec{u} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2.$$

On a “formellement"

$$\nabla_c f_a(\vec{u}) = a(z) \nabla \vec{u} + a'(z) \, \vec{u}$$

qui conduit à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla_c f_a(\vec{u})|^2 = \int_{-\delta}^0 a(z)^2 \, dz \int_{\Gamma_s} |\nabla \vec{u} \,|^2 + \int_{-\delta}^0 (a'(z))^2 \, dz \int_{\Gamma_s} |\, \vec{u} \,|^2 + \\ \displaystyle 2 \int_{-\delta}^0 a(z) \, a'(z) \, dz \int_{\Gamma_s} \vec{u} \,.\nabla \vec{u} \; . \end{cases}$$

Puisque $a \neq 0$ et $\delta > 0$, on en déduit l'existence de deux constantes $D_1(a) > 0$ et $D_2(a) > 0$ telles que

$$(A.2.4) \qquad \begin{cases} \forall \ \vec{u} \in H_0^1(\Gamma_s), \\ D_1(a) \, || \, \vec{u} \, ||_{H_0^1(\Gamma_s)} \leq || \, f_a(\vec{u}) \, ||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2} \leq D_2(a) \, || \, \vec{u} \, ||_{H_0^1(\Gamma_s)}. \end{cases}$$

Soient à présent $p \in L^2(\Gamma_s)/I\!\!R$ et $\vec{u}_n \in H_0^1(\Gamma_s)$ tels que

$$\forall n \in I\!\!N, \, || \, \vec{u}_n \, ||_{H_0^1(\Gamma_s)} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma_s} p \, div \vec{u}_n = - \, || \, p \, ||_r.$$

La définition $(A.2.2)$ de $||.||_\Pi$ combinée à $(A.2.4)$ entraîne

$$(A.2.5) \quad \left| \int_{\Gamma_s} p \, div(\tilde{M}(f_a(\vec{u}_n))) \right| \ \leq \ || \, p \, ||_\Pi \, ||f_a(\vec{u}_n)||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2} \ \leq \ D_2(a) \, || \, p \, ||_\Pi.$$

En remarquant que

$$\tilde{M}(f_a(\vec{u})) = \vec{u} \int_{-\delta}^{0} a(z) \, dz,$$

on obtient

$$(A.2.6) \qquad \begin{cases} \displaystyle \int_{\Gamma_s} p \, div(\tilde{M}(f_a(\vec{u}_n))) = \\ \displaystyle - \int_{-\delta}^{0} a(z) \, dz \int_{\Gamma_s} p \, div \vec{u}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} || \, p \, ||_r \int_{-\delta}^{0} a(z) \, dz. \end{cases}$$

La deuxième partie de l'inégalité $(A.2.3)$ se déduit de $(A.2.5)$ combinée à $(A.2.6)$, $a \neq 0$ et $\delta > 0$. $\diamondsuit$

On est maintenant en mesure de donner un sens faible au système $(M14)$.

A.2.2 — SENS FAIBLE DONNÉ AUX TERMES DE PRESSION ADDITIONNELS

ORIENTATION. Le système $(M14)$ diffère de la version linéaire stationnaire de $(M1)$ étudié dans le chapitre 2 par les termes de pression additionnels

$$-z\rho_p \nabla p_s, \quad \alpha \, \vec{c}(z) . \nabla p_s = \alpha \frac{1 - \rho_p z}{1 + \alpha \rho_T z} \, \vec{v}_0 . \nabla p_s.$$

Il faut donner un sens à ces termes et à $(M14)$. C'est le but de cette section.

HYPOTHÈSES. Dans toute la suite on suppose

(H.A.1) $|\alpha\rho_T\delta| < 1$, $\rho_p\delta < 1$, $\delta(\rho_p + \alpha\rho_T) \leq 1$,

(H.A.2) $\vec{v}_0 \in C^\infty(\Gamma_s)$.

Dans ce cas le champ $\overrightarrow{c(z)}$ est de classe C^∞ par rapport à z sur le compact $[-\delta, 0]$. En particulier, il est majoré et minoré en module et on remarque que

$$\forall\, z \in [-\delta, 0], \quad 0 \leq \frac{1 - \rho_p z}{1 + \alpha\rho_T z} \leq 2.$$

Il faut noter que (H.A.1) est automatiquement satisfaite lorsque $|\alpha|$, ρ_p et δ sont assez petits.

SENS FAIBLE. On traite les termes de pression puis on donne un sens faible à $(M14)$.

i) *Sens du terme "$z\rho_p\nabla p_s$".* Puisque ρ_p est une constante, il suffit de considérer $z\nabla p_s$. On a dit que p_s doit "vivre" dans $L^2(\Gamma_s)/\mathbb{R}$. Dans ce cas, ∇p_s est naturellement dans $H^{-1}(\Gamma_s)$. Soit $\vec{v} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$. On supppose formellement que p_s est assez régulier pour justifier les calculs qui suivent.

En appliquant le théorème de Fubini puis en effectuant une intégration par parties qui utilise le lemme 2.1.3 (*cf.* section 2.1.3), en particulier $\tilde{M}(z\,\vec{v}) \in H^1_0(\Gamma_s)$, on a

$(A.2.8)$
$$< z\nabla p_s, \vec{v} > \stackrel{def}{=} \int_\Omega z\,\vec{v}\,.\nabla p_s = \int_{\Gamma_s} \nabla p_s \tilde{M}(z\,\vec{v}) = -\int p_s\, div(\tilde{M}(z\,\vec{v})).$$

Lorsque $p_s \in L^2(\Gamma_s)$, la formule $(A.2.8)$ donne un sens à $z\nabla p_s$ dans $([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'$. De plus,

$$| < z\nabla p_s, \vec{v} > | \leq ||p_s||_r ||\tilde{M}(z\,\vec{v})||_{H^1_0(\Gamma_s)},$$

où $||.||_r$ est définie par $(A.2.1)$. En combinant le lemme A.2.1 à l'estimation $(2.1.5)$ du lemme 2.1.3, on obtient à partir de $(A.2.8)$

$$(A.2.9) \qquad \begin{cases} | < z\nabla p_s, \vec{v} > | \leq C||p_s||_\Pi ||\,\vec{v}\,||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}, \\ ||z\nabla p_s||_{([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'} \leq C||p_s||_\Pi \end{cases}$$

où la constante C ne dépend que de δ. Notons que d'une manière naturelle

$$(A.2.10) \qquad < \nabla p_s, \vec{v} > = -\int_{\Gamma_s} p_s div(\tilde{M}(\vec{v}))$$

et

$$(A.2.11) \qquad \begin{cases} | < \nabla p_s, \vec{v} > | \leq C||p_s||_\Pi ||\,\vec{v}\,||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}, \\ ||\nabla p_s||_{([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'} \leq C||p_s||_\Pi. \end{cases}$$

ii) *Sens du terme "$\overrightarrow{c(z)}.\nabla p_s$".* Soit $\tau \in H^1_0(\Omega)$. Grâce à (H.A.1)

$$\tau\,\overrightarrow{c(z)} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2, \quad ||\tau\,\overrightarrow{c(z)}\,||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2} \leq C||\tau||_{H^1_0(\Omega)}$$

où la constante C ne dépend que de $\vec{v}_0$. Par conséquent, en raisonnant comme en i) plus haut, on pose

$$(A.2.12) \qquad <\overrightarrow{c(z)}.\nabla p_s, \tau> = -\int_{\Gamma_s} p_s\, div(\tilde{M}(\tau\,\overrightarrow{c(z)}))$$

ce qui défini

$$\overrightarrow{c(z)}.\nabla p_s \in H^{-1}(\Omega).$$

de plus, il existe une constante C qui ne dépend que de δ et de $\vec{v}_0$ telle que

$$(A.2.13) \qquad ||\,\overrightarrow{c(z)}.\nabla p_s||_{H^{-1}(\Omega)} \leq C||p_s||_{\Pi}.$$

iii) *Sens donné au système* $(M14)$. On dit que $(\vec{v}, T, p_s)$ est une solution du système $(M14)$ si et seulement si

$$\vec{v} \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \quad T \in H^1_0(\Omega), \quad p_s \in \Pi$$

et $\forall\,(\vec{u}, \tau) \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2 \times H^1_0(\Omega)$,

$$(A.2.14) \quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla\vec{v}.\nabla\vec{u} + \nu_v \int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{u} \; - \int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{u} \; - \\ \rho_T \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{u} \; + <\nabla p_s, \vec{u}> - \rho_p < z\nabla p_s, \vec{u}> = \; 0, \end{cases} \\ (b) & \mathcal{K}_h \displaystyle\int_\Omega \nabla T.\nabla\tau \; + \mathcal{K}_v \int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z\tau \; + \; \alpha <\overrightarrow{c(z)}.\nabla p_s, \tau> = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME A.2.1 — *On suppose que* (H.A.2) *est satisfaite et que* $\vec{\mathrm{v}} \in L^2(\Gamma_s)$. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* α *et* ρ_p *vérifiant* $sup(|\alpha|, |\rho_p|) < \eta$, *il existe*

$$(\vec{v}, T, p_s) \in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc} \times H^1_0(\Omega) \times \Pi$$

tel que $(A.2.14)$ *soit satisfait pour tout* $(\vec{u}, \tau) \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2 \times H^1_0(\Omega)$. $\diamondsuit$

Cet énoncé est un peu "plus fin" que celui du théorème A.0.1 et est montré dans la section suivante. Par ailleurs, on n'a pas à imposer (H.A.1) qui est automatiquement satisfaite lorsque η est assez petit, ce que l'on suppose par la suite.

REMARQUE A.2.1 — La contrainte $(M14, b)$ est vérifiée dans la mesure où l'on cherche $\overrightarrow{v}$ dans l'espace $\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$. Les conditions aux limites sont incluses dans la formulation $(A.2.14)$.

REMARQUE A.2.2 — Lorsque l'on choisit un test $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ dans la formulation $(A.2.14, a)$, on a

$$\begin{cases} \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla\overrightarrow{v}\,.\nabla\overrightarrow{u} + \nu_v \int_\Omega \partial_z\overrightarrow{v}\,.\,\partial_z\overrightarrow{u} \; - \int_{\Gamma_s} \overrightarrow{\mathrm{v}}\,.\,\overrightarrow{u} \; - \\ \rho_T \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\overrightarrow{u} \; - \rho_p < z\nabla p_s, \overrightarrow{u} >= 0, \end{cases}$$

ce qui résulte du lemme 2.1.2 (section 2.1.3).

A.2.3 — DÉMONSTRATION DU RÉSULTAT D'EXISTENCEÃĐ

On démontre dans cette section le théorème A.2.1. On suppose que (H.A.2) est satisfaite et que η est assez petit pour que (H.A.1) et ses conséquences aient lieu. De plus, $\overrightarrow{\mathrm{v}} \in L^2(\Gamma_s)$. La démonstration est basée sur le théorème de point fixe de Brouwer appliqué à la pression.

Soit $q \in \Pi$ fixé. On affirme que

— Il existe un unique couple $(\overrightarrow{v}(q), T(q)) \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$ tel que pour tout $(\overrightarrow{u}, \tau) \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2} \times H_0^1(\Omega)$ on ait

$$(A.2.15) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla\overrightarrow{v}(q)\,.\nabla\overrightarrow{u} + \nu_v \int_\Omega \partial_z\overrightarrow{v}(q)\,.\,\partial_z\overrightarrow{u} \; - \int_{\Gamma_s} \overrightarrow{\mathrm{v}}\,.\,\overrightarrow{u} \; - \\ \rho_T \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T(q))\,.\,\overrightarrow{u} \; - \rho_p < z\nabla q, \overrightarrow{u} >= 0, \end{cases} \\ (b) & \begin{cases} \mathcal{K}_h \displaystyle\int_\Omega \nabla T(q)\,.\nabla\tau \, + \, \mathcal{K}_v \int_\Omega \partial_z T(q)\,.\,\partial_z\tau + \\ \alpha < \overrightarrow{c(z)}\,.\nabla q, \tau >= 0. \end{cases} \end{cases}$$

ÃĐ

L'existence s'obtient en raisonnant comme dans le chapitre 2 et est ici beaucoup plus simple. L'unicité résulte du caractère linéaire du problème variationnel $(A.2.15)$. D'après le lemme 2.1.2, il existe un unique $p(q) \in \Pi$ tel qu'au sens des distributions

$$(A.2.16) \qquad \begin{cases} (a) & \begin{cases} -\,\nu_h\Delta\overrightarrow{v}(q) - \,\nu_v\partial_{zz}^2\overrightarrow{v}(q) - \,\rho_T\, M(\nabla T(q)) - \\ z\rho_p\nabla q + \nabla p(q) = 0, \end{cases} \\ (b) & -\,\mathcal{K}_h\Delta T(q) - \mathcal{K}_v\partial_{zz}^2 T(q) + \alpha\,\overrightarrow{c(z)}\,.\nabla q = 0. \end{cases}$$

Cela permet de définir une application

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \Pi \longrightarrow \Pi, \\ q \longrightarrow p(q) \end{cases}$$

À partir de là on raisonne en deux temps en prouvant que

1) l'application $\mathcal{P}$ laisse une boule B bornée de l'espace Π invariante lorsque ρ_p et α sont assez petits,

2) l'application $\mathcal{P}$ est faiblement séquenciellement continue sur Π.ÃĐ

Comme une boule bornée de Π est faiblement compacte et métrisable pour la topologie faible, l'application $\mathcal{P}$ qui y est faiblement séquenciellement continue admet un point fixe noté p_s. La solution du système $(M14)$ est alors le triplet

$$(\vec{v}\,(p_s), T(p_s), p_s)$$

qui est unique car le système est linéaire. Il reste à montrer les points 1) et 2) plus hauts.

1) On montre que *l'application $\mathcal{P}$ laisse une boule B bornée de l'espace Π invariante lorsque ρ_p et α sont assez petits*. Ce résultat est basé sur les estimations standard toutes écrites en fonction de la norme de q dans Π. On estime d'abord la température puis la vitesse et enfin la pression.

i) *Estimation de la température*. On multiplie l'équation $(A.2.16, b)$ par $T(q)$ puis on intègre par parties. On obtient

$$\mathcal{K}_h \int_\Omega |\nabla T(q)|^2 + \mathcal{K}_v \int_\Omega |\partial_z T(q)|^2 + \alpha < \overrightarrow{c(z)}\,.\nabla q, T(q) >= 0.$$

Les coefficients de diffusion étant plus grands que ν, on en déduit en utilisant $(A.2.13)$

$$\nu \int_\Omega |\nabla_c T(q)|^2 \leq |\alpha| C\, ||q||_\Pi ||T\,(q)||_{H_0^1(\Omega)}$$

qui implique

$$||T(q)||_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{|\alpha| C}{\nu} ||q||_\Pi \qquad (A.2.17)$$

où C dépend de $\vec{v}_0$ et de Ω.

ii) *Estimation de la vitesse*. On multiplie l'équation $(A.2.16, a)$ par $\vec{v}\,(q)$ puis on intègre par parties. Comme $\vec{v}\,(q) \in \mathcal{Q}_{oc}^{1,2}$, $< \nabla p(q), \vec{v}\,(q) >= 0$. On obtient directement l'inégalité

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega |\nabla_c \vec{v}\,(q)|^2 \leq \rho_p | < z\nabla q, \vec{v}\,(q) > | + \\ \rho_T \left| \int_\Omega M(\nabla T(q))\,.\,\vec{v}\,(q) \right| + \int_{\Gamma_s} |\,\vec{\mathrm{v}}\,|\,.\,|\,\vec{v}\,(q)|. \end{cases} \qquad (A.2.18)$$

On majore chaque terme du second membre de cette inégalité l'un après l'autre. On note en premier lieu que

$$\int_{\Gamma_s} |\vec{\mathrm{v}}|\,.\,|\vec{v}\,(q)| \leq C||\vec{\mathrm{v}}\,||_{L^2(\Gamma_s)}||\vec{v}\,(q)||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}.$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité Cauchy-Schwarz, l'inégalité $(2.4.18)$ du lemme 2.4.2 (norme de M dans L^2, section 2.4.1), l'inégalité de Poincaré et enfin l'inégalité $(A.2.17)$ obtenue plus haut, on voit qu'il existe une constante C qui ne dépend que de Ω, de ρ_T, de $\vec{v}_0$ et de ν et telle que

$$\rho_T \left| \int_\Omega M(\nabla T(q))\,.\,\vec{v}\,(q) \right| \leq C|\alpha|\,.\,||\vec{v}\,(q)||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}||q||_\Pi.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité $(A.2.9)$, il vient

$$\rho_p| < z\nabla q, \vec{v}\,(q) > | \leq C\rho_p||q||_\Pi||\vec{v}\,(q)||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2}.$$

En définitive, on déduit de l'inégalité $(A.2.18)$ l'existence de deux constantes C et D qui ne dépendent que de Ω, de ρ_T, de $\vec{v}_0$, de $\vec{\mathrm{v}}$ et de ν satisfaisant

$$(A.2.19) \qquad ||\vec{v}\,(q)||_{[H^1_{f,l}(\Omega)]^2} \leq C(|\alpha| + \rho_p)\,||q||_\Pi + D.$$

iii) *Estimation de la pression*. Soit $\vec{u} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$ de norme 1. D'après l'équation $(A.2.16, a)$

$$\begin{cases} < \nabla p(q), \vec{u} > = -\displaystyle\int_{\Gamma_s} p(q)\,div(\tilde{M}(\vec{u})) \; = \\ -\nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla\vec{v}\,(q)\,.\nabla\vec{u} \, - \nu_v \displaystyle\int_\Omega \partial_z\vec{v}\,(q)\,.\,\partial_z\vec{u} \, + \displaystyle\int_{\Gamma_s} \vec{\mathrm{v}}\,.\,\vec{u} \, + \\ \rho_T \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T(q))\,.\,\vec{u} \, + \rho_p < z\nabla q, \vec{u} > . \end{cases}$$

On déduit alors de $(A.2.9)$, $(A.2.17)$, $(A.2.19)$ et des inégalités classiques, l'existence de deux constantes C et D (qui dépendent des données du problème) et telles que

$$(A.2.20) \qquad ||p(q)||_\Pi \leq C(|\alpha| + \rho_p)\,||q||_\Pi + D.$$

iv) *Conclusion*. Lorsque α et ρ_p satisfont

$$(A.2.21) \qquad C(|\alpha| + \rho_p) < 1,$$

il résulte de l'inégalité $(A.2.20)$ que la boule B dans Π définie par

$$B \stackrel{def}{=} B\left(0, \frac{D}{1 - C(|\alpha| + \rho_p)}\right)$$

est invariante par l'application p, c'est-à-dire

$$q \in B \implies p(q) \in B.$$

2) On montre que *l'application $\mathcal{P}$ est faiblement séquenciellement continue sur* Π. Ce résultat est basé sur la nature de la topologie faible dans l'espace Π et les passages à la limite dans le système $(M14)$. On suppose que (H.A.1) (qui n'est pas totalement indispensable) et (H.A.2) sont satisfaites et que α et ρ_p vérifient $(A.2.21)$ pour pouvoir utiliser la conclusion du point 1) plus haut. Le problème qui se pose est le suivant :

— soit $(q_n)_{n \in I\!N}$ une suite dans Π convergente vers q dans Π faible. Il faut prouver que $(p(q_n))_{n \in I\!N}$ converge vers $p(q)$ dans Π faible.

Pour commencer, on doit préciser la phrase : "soit $(q_n)_{n \in I\!N}$ une suite d'éléments de Π convergente vers q faible dans Π." Ensuite, on passe à la limite dans les équations de $(M14)$ pour prouver que l'on a bien "$(p(q_n))_{n \in I\!N}$ converge vers $p(q)$ dans Π faible". Cette continuité faible séquencielle est suffisante à l'application du théorème de Brouwer sur B car une boule bornée dans un espace de Banach (ici Π) est compacte et métrisable pour la topologie faible.

On raisonne maintenant en deux temps. On donne d'abord les résultats nécessaires sur Π et ensuite on passe à la limite dans les équations.

i) *Sur la topologie faible de* Π.

LEMME A.2.1 — *L'espace Π s'injecte dans l'espace $(H^1_{f,l}(\Omega))'$ de manière isométrique et une suite $(q_n)_{n \in I\!N}$ converge vers q dans Π faible si et seulement si*

$$\forall \ \vec{u} \in H^1_{f,l}(\Omega), \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma_s} q_n \, div(\tilde{M}(\vec{u})) = \int_{\Gamma_s} q \, div(\tilde{M}(\vec{u})). \qquad \diamondsuit$$

DÉMONSTRATION — Pour $q \in \Pi$ on pose

$$\forall \ \vec{u} \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2, \quad F_q(\vec{u}) = -\int_{\Gamma_s} q \, div(\tilde{M}(\vec{u})).$$

Il faut noter que cette définition est une "bonne définition" dans la mesure où elle ne dépend pas du choix du représentant de q dans Π. En effet, soit C une constante quelconque. Comme $\tilde{M}(\vec{u}) \in H^1_0(\Gamma_s)$

$$C \int_{\Gamma_s} div(\tilde{M}(\vec{u})) = 0$$

de sorte que
$$-\int_{\Gamma_s} q\, div(\tilde{M}(\vec{u})) = -\int_{\Gamma_s} (q+C)\, div(\tilde{M}(\vec{u})).$$
L'application F_q est linéaire continue sur $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$. Cela permet de définir l'application linéaire
$$\Psi : \begin{cases} \Pi \longrightarrow ([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)' \\ \quad q \longrightarrow F_q \end{cases}$$
qui satisfait d'après la définition $(A.2.2)$ de $||.||_\Pi$
$$||F_q||_{([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'} = ||q||_\Pi.$$
Cela montre que ψ est une isométrie et par suite injective.

La deuxième partie du lemme résulte de cette construction. En effet, comme Ψ est linéaire continue bijective de Π dans son image, une suite $(q_n)_{n\in I\!N}$ converge vers q dans Π faible si et seulement si $(F_{q_n})_{n\in I\!N}$ converge vers F_q dans $([H^1_{f,l}(\Omega)]^2)'$ faible, *i.e.* puisque $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$ est réflexif, si et seulement si pour tout $\vec{u}\in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2$
$$\lim_{n\to\infty} F_{q_n}(\vec{u}) = F_q(\vec{u}),$$
ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

ii) *Passage à la limite dans les équations*. Soit $(q_n)_{n\in I\!N}$ une suite d'éléments de Π convergente vers q dans Π faible. On prouve que $(p(q_n))_{n\in I\!N}$ converge vers $p(q)$ dans Π faible. Posons pour simplifier
$$\vec{v}_n = \vec{v}\,(q_n), \quad T_n = T(q_n), \quad p_n = p(q_n).$$
La suite $(q_n)_{n\in I\!N}$ étant bornée dans Π, il résulte des estimations $(A.2.17)$, $(A.2.19)$ et $(A.2.20)$ que
$$(\vec{v}_n)_{n\in I\!N}, \quad (T_n)_{n\in I\!N}, \quad (p_n)_{n\in I\!N}$$
sont bornées dans
$$[H^1_{f,l}(\Omega)]^2, \quad H^1_0(\Omega), \quad \Pi$$
respectivement. De chacune de ces suites on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers $\vec{v}$, T et p dans $[H^1_{f,l}(\Omega)]^2$, $H^1_0(\Omega)$ et Π respectivement.

Il ne reste plus qu'à montrer que $p = p(q)$.

Soit $(\vec{u},\tau) \in [H^1_{f,l}(\Omega)]^2 \times H^1_0(\Omega)$. On a
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla\vec{v}_n.\nabla\vec{u} = \int_\Omega \nabla\vec{v}.\nabla\vec{u}, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial_z\vec{v}_n\,.\,\partial_z\vec{u} = \int_\Omega \partial_z\vec{v}\,.\,\partial_z\vec{u}, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega M(\nabla T_n)\,.\,\vec{u} = \int_\Omega M(\nabla T)\,.\,\vec{u}, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla T_n.\nabla\tau = \int_\Omega \nabla T.\nabla\tau, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \partial_z T_n.\,\partial_z\tau = \int_\Omega \partial_z T.\,\partial_z\tau. \end{cases}$$

Par ailleurs

$$< z\nabla q_n, \overrightarrow{u}> = < \nabla q_n, z\overrightarrow{u}> = F_{q_n}(z\overrightarrow{u})$$

en notant que $z\overrightarrow{u}\in H^1_{f,l}(\Omega)$. Il en résulte grâce au lemme A.2.1

$$\lim_{n\to\infty} < z\nabla q_n, \overrightarrow{u}> = < z\nabla q, \overrightarrow{u}>.$$

De même

$$<\overrightarrow{c(z)}.\nabla q_n, \tau > = F_{q_n}(\tau\, \overrightarrow{c(z)})$$

en notant également que $\tau\, \overrightarrow{c(z)} \in H^1_{f,l}(\Omega)$. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} <\overrightarrow{c(z)}.\nabla q_n, \tau > = <\overrightarrow{c(z)}.\nabla q, \tau >.$$

Enfin

$$\lim_{n\to\infty} < \nabla p_n, \overrightarrow{u}> = \lim_{n\to\infty} F_{p_n}(\overrightarrow{u}) = < \nabla p, \overrightarrow{u}>.$$

Finalement

$$(A.2.22) \quad \begin{cases} (a) & \begin{cases} \nu_h \displaystyle\int_\Omega \nabla\overrightarrow{v}.\nabla\overrightarrow{u} + \nu_v \int_\Omega \partial_z\overrightarrow{v}.\partial_z\overrightarrow{u} + \int_{\Gamma_s} \overrightarrow{\mathrm{v}}.\overrightarrow{u} - \\ \rho_T \displaystyle\int_\Omega M(\nabla T).\overrightarrow{u} - \rho_p < z\nabla q, \overrightarrow{u}> + < \nabla p, \overrightarrow{u}> = 0, \end{cases} \\ (b) & \mathcal{K}_h \displaystyle\int_\Omega \nabla T.\nabla\tau + \mathcal{K}_v \int_\Omega \partial_z T.\partial_z\tau + \alpha <\overrightarrow{c(z)}.\nabla q, \tau > = 0. \end{cases}$$

En prenant un test $\overrightarrow{u}\in \mathcal{Q}^{1,2}_{oc}$, on note que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(q), \quad \tau = \tau(q).$$

Il en résulte que $p = p(q)$ par définition. Ceci achève entièrement la démonstration du théorème A.2.1 ainsi que celle du théorème A.0.1. $\diamondsuit$

REMARQUE A.2.3 — Le cas d'évolution correspondant à $(M14)$ est un problème ouvert lorsque $\overrightarrow{\mathrm{v}}\neq 0$. $\diamondsuit$

REMARQUE A.2.4 — Il est possible d'écrire un modèle de turbulence couplant les équations primitives avec des termes de pression additionnels et une équation pour l'énergie cinétique turbulente. L'existence d'une solution au système obtenu est un problème ouvert. $\diamondsuit$

ÃÐ

APPENDICE B

REMARQUES SUR LES FLUIDES TOURNANTS

B. 1 — LE PROBLÈME DE FAIRE TENDRE LE NOMBRE DE ROSSBY VERS ZÉRO

On considère le problème du passage à la limite dans les équations d'un fluide tournant lorsque le nombre de Rossby tend vers 0, un problème dont il a été question dans le $\S 3.3$ lorsqu'on a justifié l'équilibre géostrophique.

Dans cet appendice, le facteur de Coriolis f n'est plus constant et s'écrit au voisinage d'une latitude donnée

$$f = f_0 + \varepsilon\, f_1 + ...$$

Une fois les variables adimensionnalisées, $\varepsilon > 0$ représente le nombre de Rossby. On effectue le développement asymptotique formel

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + \varepsilon\, \vec{v}_1 + ..., \\ \rho = \hat{\rho} + \varepsilon\, \rho_1 + ..., \\ p = p_0 + \varepsilon\, p_1 + ... \end{cases}$$

(*cf.* LIONS [2], PEDLOSKI [1]). On "injecte" ces développements dans le système des équations primitives $(M1)$ (*cf.* la fin du chapitre 1 avec ρ au lieu de T) puis on identifie entre eux les termes en ε de même ordre. On en déduit le système des équations quasi-géostrophiques écrit sous la forme simplifiée

$$(QG) \qquad \begin{cases} (a) \quad f_0\, \vec{k} \times \vec{v}_0 + \nabla p_0 = 0, \\ (b) \quad \begin{cases} \partial_t \vec{v}_0 + (\vec{v}_0\, \nabla)\vec{v}_0 + L_1(\vec{v}_0) + f_1\, \vec{k} \times \vec{v}_0 + \\ f_0\, \vec{k} \times \vec{v}_1 + \nabla p_1 = 0, \end{cases} \\ (c) \quad \partial_z p_0 = -\,\hat{\rho}\, g, \\ (d) \quad \partial_t \hat{\rho} + \vec{v}_0 . \nabla \hat{\rho} + L_2(\hat{\rho}) = F(\hat{\rho}) \end{cases}$$

où

- les inconnues sont $(\vec{v}_0, p_0, \hat{\rho}, p_1)$,
- L_1 et L_2 désignent les opérateurs de diffusion,
- l'équilibre géostrophique (QG, a) joue le rôle d'une contrainte, le terme

$$f_0\,\vec{k} \times \vec{v}_1 + \nabla p_1$$

  est un mulptiplicateur de Lagrange pour cette contrainte (*cf.* LIONS [2]).

Pour l'analyse mathématique du système (QG) avec des conditions aux limites appropriées, voir LIONS [2] et CHEMINÊÊ [1].

On revient au problème du passage à la limite dans les équations lorsque le nombre de Rossby tend vers zéro. Les travaux de CHEMIN Ê[1] et GRENIER Ê[1] montrent que les suites de solutions ne sont pas fortement compactes dans des espaces de type $L^p([0,\mathcal{T}], L^p(\Omega))$. En effet, à cause du terme antisymétrique en $1/\varepsilon$ dans les équations primitives, on ne dispose d'aucune estimation de la suite de leurs dérivées par rapport au temps et on n'est pas en mesure d'appliquer le lemme d'Aubin pour passer à la limite dans les équations (*cf.* aussi le système $(B.2.1)$ plus bas).

Dans la suite de cet appendice, on reprend l'exemple bidimensionnel d'un fluide tournant sans pression exposé dans LIONS [2] pour dégager la difficulté qu'il y a à faire tendre le nombre de Rossby vers 0 dans les équations *dans le cas d'évolution*.

B. 2 — UN EXEMPLE BIDIMENSIONNEL SANS TERME DE PRESSION

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert borné régulier dans $I\!R^2$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on considère le système

$$(B.2.1) \qquad \begin{cases} (a) \quad \partial_t y_1 - \Delta y_1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\, y_2 = f_1, \\ (b) \quad \partial_t y_2 - \Delta y_2 + \dfrac{1}{\varepsilon}\, y_1 = f_2, \\ (c) \quad \vec{y}\,|_{t=0} = \vec{y}_0, \quad \vec{y}\,|_{\partial\mathcal{U}} = 0, \end{cases}$$

où l'on pose

$$\vec{y} = (y_1, y_2), \quad \vec{f} = (f_1, f_2).$$

Compte tenu de la difficulté que l'on cherche à mettre en évidence, on fait l'hypothèse simplificatrice

(H.B.1) $(\vec{y}_0, \vec{f}) \in [C^\infty(\overline{\mathcal{U}})]^4$.

THÉORÈME B.1.1 — *On suppose* (H.B.1) *satisfaite. Alors le système* $(B.2.1)$ *admet une et une seule solution de classe* C^∞ *sur* $[0,\mathcal{T}] \times \mathcal{U}$. $\diamondsuit$

Cet énoncé est montré dans LIONS Ê[1]. Dans la suite, on note $\vec{y}_\varepsilon$ la solution de $(B.2.1)$. En suivant les développements effectués pour l'obtention du système quasi-géostrophique, posons

$$(B.2.2) \qquad \vec{y}_\varepsilon = \vec{y}^{\,0} + \varepsilon\, \vec{y}^{\,1} + ...$$

que l'on reporte dans $(B.2.1)$. On identifie entre eux les termes de même ordre en ε. On en déduit

$$(B.2.3) \qquad \begin{cases} (a) & (-y_1^0, y_2^0) = (0,0), \\ (b) & \vec{y}^{\,1} = -\vec{k} \times \vec{f} \overset{def}{=} -(-f_2, f_1). \end{cases}$$

Les questions posées sont les suivantes.

> 1) Peut-on donner un sens au développement $(B.2.2)$, les suites de solutions sont-elles fortement compactes dans un epace de type L^2 et a t-on bien obtenu le système limite en écrivant $(B.2.3)$?
> 2) Sinon quel est le développement asymptotique à l'ordre 1 de $\vec{y}_\varepsilon$?Ê

La réponse à la première question est négative sauf dans le cas où $\vec{y}_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque la donnée est “bien préparée". Dans la section suivante on effectue le développement asymptotique cherché mais avant, on note que le choix de $\vec{y}_\varepsilon$ comme fonction test dans $(B.2.1)$ montre que

— la suite $(\vec{y}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\mathcal{U}))$

puisque le vecteur $\vec{k} \times \vec{y}_\varepsilon$ est orthogonal à $\vec{y}_\varepsilon$. Par conséquent,

— on peut extraire de la suite $(\vec{y}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une sous-suite convergente dans $L^2([0,\mathcal{T}], H_0^1(\mathcal{U}))$ faible vers une limite $\vec{y}$ lorsque ε tend vers 0.Ê

On termine cette section en identifiant $\vec{y}$ à partir du système $(B.2.1)$.

Soit $\vec{\phi} \in [C_c^\infty(\overline{\mathcal{U}})]^2$ que l'on choisit comme test dans $(B.2.1)$. On a

$$\varepsilon \left(\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{U}} \nabla \vec{y}_\varepsilon . \nabla \vec{\phi} - \vec{y}_\varepsilon . \partial_t \vec{\phi} \right) + \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{U}} \vec{k} \times \vec{y}_\varepsilon . \vec{\phi} = \varepsilon \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{U}} \vec{f} . \vec{\phi} \,.$$

Lorsque ε tend vers 0, on obtient

$$\forall\ \vec{\phi} \in [C_c^\infty(\overline{\mathcal{U}})]^2, \quad \int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{U}} \vec{k} \times \vec{y} . \vec{\phi} = 0$$

qui implique $\vec{y} = 0$ p.p dans $[0,\mathcal{T}] \times \mathcal{U}$, confirmant le résultat trouvé à partir de l'ansatz $(B.2.2)$ reporté dans $(B.2.1)$.

B. 3 — CHANGEMENT DE VARIABLES ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Soit la matrice orthogonale

$$A(\tau) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} cos(\tau) & -sin(\tau) \\ sin(\tau) & cos(\tau) \end{pmatrix}.$$

On pose

$$(B.3.1) \qquad \vec{z}_\varepsilon \stackrel{def}{=} A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \vec{y}_\varepsilon \, .$$

Pour ne pas alourdir le formalisme, on suppose que

(H.B.2) $\vec{f}$ est un vecteur stationnaire. Ê

Le vecteur $\vec{z}_\varepsilon$ est une solution de

$$(B.3.2) \qquad \begin{cases} \partial_t \vec{z}_\varepsilon - \Delta \vec{z}_\varepsilon = A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \vec{f}, \\ \vec{z}_\varepsilon \,|_{t=0} = \vec{y}_0, \quad \vec{z}_\varepsilon \,|_{\partial\mathcal{U}} = 0. \end{cases}$$

Soient

— $(e_n)_{n\in I\!N}$ la suite des fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ dans $H_0^1(\mathcal{U})$,
— $(\lambda_n)_{n\in I\!N}$ la suite des valeurs propres correspondantes.

On peut développer $\vec{f}$ sous la forme d'une série de Fourier

$$\vec{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\alpha}_n \, e_n$$

et on cherche $\vec{z}_\varepsilon$ sous la forme

$$(B.3.3) \qquad \vec{z}_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{a}_n(t) \, e_n.$$

La série de Fourier $(B.3.3)$ est injectée dans le système $(B.3.2)$. On égale ensuite chaque mode de Fourier en résolvant à chaque fois une équation différentielle. Il vient le développement limité

$$(B.3.4) \qquad \vec{z}_\varepsilon = \vec{z} + \varepsilon \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} e_n \, \vec{k} \times \vec{\alpha}_n - A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \vec{k} \times \vec{f} \right] + o(\varepsilon)$$

où $\vec{z}$ est la solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} (a) & \partial_t \vec{z} - \Delta \vec{z} = 0, \\ (b) & \vec{z}\,|_{t=0} = \vec{y}_0, \quad \vec{z}\,|_{\partial \mathcal{U}} = 0. \end{cases}$$

De plus, au sens des mesures

$$A\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} e_n\, \vec{k} \times \vec{\alpha}_n = O(\varepsilon).$$

En reportant cette estimation dans le développement $(B.3.4)$ combiné à formule $(B.3.1)$ on obtient le développement asymptotique

$$(B.3.5) \qquad \vec{y}_\varepsilon = A\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \vec{z} - \varepsilon\, \vec{k} \times \vec{f} + o(\varepsilon).$$

On retrouve dans cette formule le terme "$-\varepsilon\, \vec{k} \times \vec{f}$" d'ordre ε donné dans l'ansatz $(B.2.2)$ et calculé par la formule $(B.2.3, b)$. Cependant, il apparaît dans cette formule le terme supplémentaire "$A\,(-t/\varepsilon)\,\vec{z}$". Il ne reste plus qu'à s'assurer que ce terme est bien d'ordre ε.

• Lorsque $\vec{y}_0 = 0$, la solution de l'équation de la chaleur $\vec{z}$ avec une donnée de Dirichlet homogène au bord est nulle. Dans ce cas $A\,(-t/\varepsilon)\,\vec{z}$ est nul et on dit que la donnée initiale est bien préparée. L'ansatz $(B.2.2)$ est justifié dans ce cas et la suite $(\vec{y}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers 0 dans $L^2([0, \mathcal{T}] \times \mathcal{U})$ lorsque ε tend vers 0.

• Lorsque $\vec{y}_0 \neq 0$, $\vec{z} \neq 0$ dans $[0, \mathcal{T}] \times \mathcal{U}$ et alors $A\,(-t/\varepsilon)\,\vec{z}$ est non nul. C'est un terme oscillant qui est dû à la force de Coriolis. On sait que $(\vec{y}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers 0 dans $L^2([0, \mathcal{T}], H_0^1(\mathcal{U}))$ faible alors que l'on déduit de $(B.3.5)$

$$\|\vec{y}_\varepsilon\|_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} = \|\vec{z}\|_{L^2([0,\mathcal{T}]\times\Omega)} + O(\varepsilon)$$

puisque A est une matrice orthogonale. Il n'y a donc aucune compacité forte où que ce soit.

Enfin, à l'aide d'intégrations par parties on a pour tout $\vec{\phi} \in C([0, \mathcal{T}] \times \mathcal{U})$

$$\begin{cases} \left\langle A\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \vec{z}, \vec{\phi} \right\rangle = \varepsilon \left[\int_{\mathcal{U}} \vec{\phi}\,(0, M) \,.\, \vec{k} \times \vec{z}_0\,(M)\, dM\right] - \\ \varepsilon \left[\int_{\mathcal{U}} A\left(-\frac{\mathcal{T}}{\varepsilon}\right) \vec{\phi}\,(\mathcal{T}, M) \,.\, \vec{k} \times \vec{z}\,(\mathcal{T}, M)\, dM\right] \end{cases}$$

ce qui montre que ce terme oscillant est bien de l'ordre de ε en mesure. Donc l'ansatz $(B.2.2)$ est incomplet dans ce cas. ♢

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS, R.
[1] *Sobolev Spaces*, Academic press, New-York, (1975).

ALINHAC, S. GÉRARD, P.
[1] *Opérateurs pseudo différentiels et théorème de Nash-Moser*, Inter Éditions /Éditions du CNRS, (1991).

AMROUCHE, C
[1] Communications privées.

AMROUCHE, C. GIRAULT, V.
[1] Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension, *Czechoslovak Mathematical Journal, 44, No 119, 109-140, (1994).*

BARANGER, J. MIKELIC, A.
[1] Solutions stationnaires pour un écoulement quasi-newtonien avec échauffement visqueux, C.R.A.S, Série I, t. 319, n°6, 637-647, (1994), et article détaillé à paraître.

BLANCHARD, D
[1] Renormalized solutions for parabolic problems with L^1 data, *Proceedings of free boundary problems conference, Zakopane, (1995).*

BLANCHARD, D. GUIBÉ, O
en préparation.

BLANCHARD, D. REDWANE, H.
[1] Solutions renormalisées d'équations paraboliques à deux nonlinéarités, *C.R.A.S, série I, t. 319, 831-835, (1994), et article détaillé soumis à Journ. Maths Pures et App.*

BLANKE, B.
[1] *Couche de mélange dans un modèle tropical de circulation générale océanique*, Thèse de Doctorat nouveau régime de l'Université Pierre et Marie CURIE, (1992).

BLANKE, B. DELECLUSE, P.
[1] Variability of the tropical atlantic Ocean simulated by a general circulation model with two different mixed layer physics, *J. Phys. Ocea., 23, No 7, 1363-1388, (1993).*

BRYAN, K.
[1] A numerical method for the study of the circulation world ocean, *J. computational Phys., 4, 347-379, (1969).*

BOCCARDO, L. GALLOUËT, T.
[1] Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, *J. Funct. Anal. 87, 149-169, (1989).*

BRÉZIS, H.
[1] *Analyse fonctionnelle, théorie, méthodes et applications*, Masson, (1983).

CARTAN, H.
[1] *Calcul différentiel*, Hermann, 1966.

CERCIGNANI, C.
[1] *The Boltzmann equation and its applications*, Springer-Verlag, (1988).

CHACON-REBELLO, T.
[1] Oscillations due to the transport of microstructures, *SIAM J. Appl. Math, 48, n°5, 1128-1146, (1988).*

CHEMIN, J.-Y.
[1] A propos d'un problème de pénalisation antisymétrique, *C.R.A.S, série I, t. 321, 861-864, (1995), et article détaillé à paraître.*

CLAIN, S.
[1] *Analyse mathématique et numérique d'un modèle de chauffage par induction*, thèse n°1240, École polytechnique fédérale de Lausanne, (1994).

COLIN de VERDIÈRE, A.
[1] Buoyancy driven planetary flows, *J. of Marine Research, 46, 215-265, 1988.*

DELECLUSE, P.
[1] Communications privées.

DELEERSNIJDER, E.
[1] *Modélisation hydrodynamique tridimensionnelle de la circulation générale estivale de la région du détroit de Béring,* thèse de l'université catholique de Louvain, (1992),
[2] Communications privées.

DELEERSNIJDER, E. LUYTEN, P.
[1] On the practical advantages of the quasi-equilibrium version of the Mellor-Yamada level 2.5 turbulence closure applied to marine modelling, *Appl. Math. Modelling, vol 18, 281-287, (1994).*

Di PERNA, R.-J. LIONS , P.-L.
[1] Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. math, 511-547, (1989),*
[2] On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability, *Annals of Math, 130, 321-366, (1989).*

GALLOUËT, T. HERBIN, R.
[1] Existence of a solution to a coupled elliptic system,

GILBARG, D. TRUDINGER, N.
[1] *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag (1977).

GILL, A.-E.
[1] *Atmosphere-Ocean dynamics*, Academic Press, (1982).

GRENIER, E.
[1] Fluides tournants et ondes d'inerties, *C.R.A.S, série I, t 321, 711-714, (1995) et article détaillé à paraître dans Journ. Maths Pures et App.*

KOLMOGOROV. A,
[1] The equations of turbulent motion in an incompressible fluid, *Isv. Acad. Sci. USSR Phys., vol 6, 56-58, (1942).*

LERAY, J.
[1] Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math. 63, 193-248, (1934).*

LEWANDOWSKI, R.
[1] The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy viscosity, *Nonlinear Analysis TMA, Vol 28, No 2, 393-417, (1997)*,
[2] Sur quelques problèmes posés par l'océanographie, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, 567-572, (1995)*,
[3] Étude d'un système stationnaire linéarisé d'équations primitives avec des termes de pression additionnels, *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, 173-178, (1997)*,
[4] *Cours de l'Université de Séville*, en espagnol, preprint.

LEWANDOWSKI, R. MURAT, F.
[1] Sur un système turbulent stationnaire avec une viscosité non bornée, *à paraître*.

LIONS , J.-L.
[1] *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier Villard, (1969),
[2] *Cours du collège de France*, notes manuscriptes, (1993-1994, 1994-1995).

LIONS , J.-L. TEMAM, R. WANG, S.
[1] Models for the coupled Atmosphere and Ocean, *Computational mechanics advances, Vol 1, n°1, 1-120, (1993),*
[2] On the equations of the large scale Ocean, *Nonlinearity, 5, 1007-1053, (1992),*
[3] New formulation of the primitive equations of Atmosphere and applications, *Nonlinearity, 5, 237-288, (1992).*

LIONS, P.-L. MURAT, F.
[1] Solutions renormalisées d'équations elliptiques, *à paraître*.

MELLOR, G.-L. YAMADA, T.
[1] Developement of turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Rev. Geophys. Space Phys., Vol 20, 851-875, (1982).*

MURAT, F.
[1] *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales,* Cours de l'université de Séville, (1993),
[2] Communications privées.

MOHAMMADI, B. PIRONNEAU, O.
[1] *Analysis of the k-Epsilon model*, collection RMA, Masson, (1994).

NAKAHARA, M.
[1] *Geometry, topology and physics*, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, (1990).

NECAS, J.
[1] *Équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, (1966).

PEDLOSKY, J.
[1] *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1979).

OXTOBY, J.
[1]*Category and measures*, Springer-Verlag, (1979).

PIRONNEAU, O.
à paraître.

RUDIN, W.
[1] *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill, (1966).

RUELLE, D. TAKENS, F.
[1] On the nature of the turbulence, *com. Maths. Phys., vol. 20, 167-192, (1971).*

S CHWARTZ, L.
[1] *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, (1951),
[2] Distributions à valeurs vectorielles, *Annales de l'institut FOURIER, 7, 1-141, (1957).*

SIMON, J.
[1] Compact sets in the space $L^p([0,T],B)$, *Ann. Mat. Pura Appl., 146 IV, 65-96, (1987),*
[2] Démonstration constructive d'un théorème de G. De Rham, *C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 1167-1172, (1993),*
[3] *Distributions à valeurs vectorielles,* à paraître.

TARTAR, L.
[1] *Topics in non linear analysis*, Publications mathématiques d'Orsay, (1978),
[2] Exposés de séminaires, Collège de France.

TEMAM, R.
[1] *Navier-Stokes equations,* North Holland, (1977).